ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 6 **Oktober 1926** **Heft 5**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Beitrag zur Kinematik des Raumfachwerkes.[1]

Von **WILLY PRAGER** in Darmstadt.

Einleitung. Während zur Ermittlung der Stabkräfte eines ebenen Fachwerks meist zeichnerische Methoden verwendet werden, sind zur Lösung der gleichen Aufgabe beim Raumfachwerk fast ausschließlich analytische Methoden im Gebrauch. Es hat dies seinen Grund hauptsächlich darin, daß die übliche Abbildung eines räumlichen Gebildes mittels Grund- und Aufriß für die Lösung der Gleichgewichtsaufgabe an einem Fachwerkknoten durchaus ungeeignet ist; denn für die Auffindung der gesuchten Kräfte sind die Gleichgewichtsbedingungen für den Grundriß allein nicht hinreichend, die für Grund- und Aufriß nicht sämtlich notwendig.

In seinem 1910 erschienenen, ausgezeichneten Werk »Statique graphique des systèmes de l'espace« hat Herr B. Mayor ein Abbildungsverfahren entwickelt, das zu einer befriedigenden Lösung der Spannungsaufgabe beim Raumfachwerk führt. Es ist das Verdienst von Hrn. v. Mises, die überaus umständlichen Ableitungen des Hrn. Mayor durch solche elementarster Natur ersetzt zu haben[2]).

[1]) Von der Technischen Hochschule Darmstadt genehmigte Dr.-Ing.-Dissertation. Referent: Prof. Dr. W. Schlink. Korreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Kammer. Tag der mündl. Prüfung: 30. IV. 26.

[2]) »Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme« Zeitschrift für Mathematik und Pphysik 1916.

Anmerkung des Herausgebers. In dem Vorwort zu einem neu erschienenen Buch von Hrn. Mayor behauptet Hr. M. Paschoud in nicht ganz verständlicher Weise, ich hätte in meiner oben zitierten Arbeit, »wenn auch in abgeschwächter Form«, aber »ohne den Ursprung der Formeln zu erwähnen«, unberechtigte Ansprüche hinsichtlich der Neuheit meiner Methoden erhoben. Hierzu sei festgestellt, daß in der Einleitung meiner Arbeit in mehr als 20 Zeilen das Verhältnis meines Abbildungsverfahrens zu dem Mayorschen ausführlich dargelegt erscheint. Bei mir werden einer Raumkraft zwei ebene Stäbe derart zugeordnet, daß die Zusammensetzung der Raumkräfte durch Zeichnen zweier ebener Seilpolygone erledigt wird, während bei Mayor an deren Stelle die Figur einer Kette linearer Komplexe tritt. Nur bei den Aufgaben über Kräfte, die an einem Punkt angreifen, wie bei allen Fachwerkproblemen, fallen die beiden Methoden zusammen, wie ich es an der oben angeführten Stelle ausdrücklich hervorgehoben habe — was auch Hrn. Paschoud nicht entgangen ist. Die Bemerkungen von Hrn. Paschoud sind um so unberechtigter, als die Arbeiten von Hrn. Mayor, die früher völlig unbeachtet geblieben waren, erst durch meine hervorhebende Zitierung und durch die Verwertung, die sie in meiner Arbeit gefunden haben, bekannt geworden sind und die ihnen zukommende Anerkennung erlangt haben. R. v. Mises.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die in der Statik der ebenen Fachwerke so fruchtbare kinematische Methode auch auf Raumfachwerke anzuwenden. Auch hier führt die Abbildung in Grund- und Aufriß zu umständlichen Konstruktionen [1]). Im wesentlichen handelt es sich ja auch hier, wie bei der Spannungsaufgabe, um Abbildung von Vektoren (hier Verschiebungen, dort Kräfte). Zur Darstellung eines Raumvektors sind drei Größen erforderlich, die in eindeutiger Beziehung zu den drei Komponenten des Vektors in bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem stehen müssen. Die Darstellung eines solchen Vektors in Grund- und Aufriß enthält nun die zur Schnittlinie der beiden Bildebenen parallele Komponente des Raumvektors doppelt, nämlich in jeder der beiden Projektionen, gibt also mehr als unbedingt notwendig.

Das in der vorliegenden Arbeit neben dem erwähnten Misesschen verwendete Abbildungsverfahren ist diesem in gewisser Beziehung dual entsprechend. Es wird von Hrn. v. Mises in einer späteren Arbeit [2]) kurz angedeutet. Auch Hr. Mayor kommt im neunten Kapitel seines Werkes auf fast dasselbe Verfahren, scheint aber dessen Tragweite nicht erkannt zu haben, da er es nur zur Ableitung einiger später gebrauchten Beziehungen und nicht konstruktiv verwendet.

Der Vollständigkeit halber muß hier auch das erste Mayor-Misessche Abbildungsverfahren erläutert werden; die Beweise der einzelnen Sätze werden jedoch nur für das neue Verfahren erbracht.

Abschnitt I: Theoretische Grundlagen.

1. Die Abbildungsverfahren. Konstruktion der Abbildungen. Der abzubildende Vektor P' habe in bezug auf ein rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem die Komponenten X', Y', Z' [3]). Wir wenden auf ihn die folgenden Abbildungsverfahren an:

A. Dem Vektor P' wird der Bildstab [4]) P mit den Komponenten $X=0$, $Y=0$, $Z=Z'$ zugeordnet, dessen Momente in bezug auf die Koordinatenachse die Größen haben: $M_x = X' \cdot c$, $M_y = Y' \cdot c$, $M_z = 0$, wobei c eine beliebig gewählte Länge, die sog. Abbildungskonstante ist.

B. Dem Vektor P' wird der Bildstab P zugeordnet mit den Komponenten $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = 0$, dessen Momente in bezug auf die Koordinatenachsen die Größen haben: $M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = Z' \cdot c$, wobei c wieder die Konstante bedeutet. In beiden Fällen soll das Moment eines Vektors in bezug auf eine Achse als positiv bezeichnet werden, wenn der es in der üblichen Weise darstellende Vektor mit der Achse gleichgerichtet ist.

Durch jede der beiden Abbildungen ist eine umkehrbare, eindeutige Zuordnung zwischen den Vektoren des Raumes und ihren Bildstäben festgelegt. Zwei Sonderfälle sind jedoch hervorzuheben. Einem Vektor P', der zur x-y-Ebene parallel ist, entspricht bei der Abbildung A der Bildstab: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; der in bezug auf die Koordinatenachsen die Momente hat: $M_x = X' \cdot c$, $M_y = Y' \cdot c$, $M_z = 0$.

Der Träger dieses »uneigentlichen Stabes« ist die zur z-Achse parallele unendlich ferne Gerade; in Analogie mit dem Begriff Kräftepaar können wir ihn als »Stäbepaar« bezeichnen. Stellen wir das Stäbepaar durch einen zu seiner Ebene senkrechten Vektor dar, dessen Größe gleich dem Quotienten aus dem Moment des Stäbepaares und der Abbildungskonstannten c ist, und der nach der Seite hin gerichtet ist, von der aus gesehen das Stäbepaar im Uhrzeigersinn dreht, so hat dieser Vektor P_1' die Komponenten:

$$X_1' = \frac{1}{c} \cdot M_x; \qquad Y_1' = \frac{1}{c} \cdot M_y; \qquad Z' = 0,$$

ist also identisch mit dem Vektor P', den das Stäbepaar darstellt. Ferner entspricht einem zur x-Achse parallelen Vektor P' bei der Abbildung B ein Stäbepaar der x-y-Ebene; der es darstellende Vektor P_1' ist wiederum mit dem Vektor P' identisch.

---

[1]) Siehe z. B. Hübner, »Der einheitliche Verschiebungsplan für räumliches Fachwerk« Civilingenieur 1893.

[2]) »Anwendungen der Motorrechnung«, diese Zeitschrift. 4, 1924, S. 212.

[3]) Im folgenden werden die Elemente der darzustellenden Vektoren von denen ihrer Bilder durch einen beigesetzten Strich (') unterschieden.

[4]) Während ein Vektor parallel zu sich beliebig im Raume verschoben werden kann, ist ein Stab an eine Gerade, seinen Träger gebunden. Zur Festlegung eines Vektors genügt also die Angabe seiner drei Komponenten, während zur Festlegung eines Stabes außerdem noch die Angabe seiner Momente in bezug auf die drei Koordinatenachsen erforderlich ist.

Die x-y-Ebene, die wir horizontal annehmen, wollen wir als Bildebene verwenden. Die Lage eines Bildstabes der Abbildung A ist dann festgelegt durch Angabe seines Schnittpunktes mit der Bildebene. Die Koordinaten dieses »Bildpunktes« ($\overline{P}$ in Abb. 1) sind gegeben durch die Formeln:

$$x_0 = \frac{Y'}{Z'} \cdot c \quad \text{und} \quad y_0 = -\frac{X'}{Z'} \cdot c ,$$

es ist also $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{Y'}{X'}$, d. h. die Verbindungslinie von Bildpunkt und Koordinatenursprung steht senkrecht auf dem Grundriß des abgebildeten Vektors. Sind die abzubildenden Vektoren in Grund- und Aufriß gegeben, so können die Bildpunkte wie folgt gefunden werden: Man verschiebt alle Vektoren parallel zu sich, derart, daß sie durch den Punkt $z = c$ der z-Achse gehen und bestimmt in dieser Lage ihre Schnittpunkte mit der Bildebene (Abb. 1). Sodann dreht man das System dieser Schnittpunkte um einen rechten Winkel in dem Sinn um den Ursprung, in dem man die x-Achse um einen rechten Winkel drehen muß, um sie mit der y-Achse zur Deckung zu bringen.

Der Träger eines Bildstabes bei der Abbildung B ist parallel zum Grundriß des abgebildeten Vektors und hat vom Ursprung einen Abstand, den man wie folgt ermitteln kann (Abb. 2):

Man bestimmt im Grundriß zwei auf der Wirkungslinie des abzubildenden Vektors liegende Punkte, deren Abstand gleich der Abbildungskonstanten c ist. Die Höhendifferenz der entsprechenden Aufrißpunkte ist dann gleich dem gesuchten Abstand.

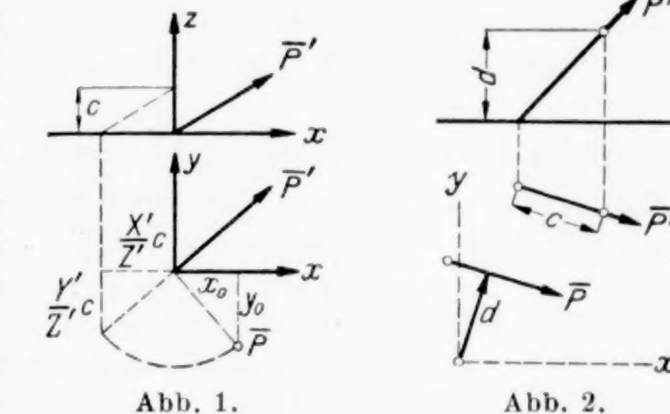


Abb. 1. Abb. 2.

2. Grundlegende Sätze. Satz 1. Die Summe mehrerer Vektoren wird dargestellt durch die Summe ihrer Bildstäbe[1]).

Beweis: Die Summe $\overline{R}'$ der Vektoren $\overline{P}_i'$ hat die Komponenten:

$$X_R' = \Sigma X_i' ; \qquad Y_R' = \Sigma Y_i' ; \qquad Z_R' = \Sigma Z_i' .$$

Der diese Summe abbildende Stab R hat also die Komponenten:

$$X_R = 0 ; \qquad Y_R = 0 ; \qquad Z_R = \Sigma Z_i' ,$$

und in bezug auf die Achsen die Momente:

$$_RM_x = \Sigma X_i' \cdot c ; \qquad _RM_y = \Sigma Y_i' \cdot c ; \qquad _RM_z = 0$$

und ist daher identisch mit der Summe der einzelnen Bildstäbe:

$$X_i = 0 ; \quad Y_i = 0 ; \quad Z_i = Z_i' ; \quad _iM_x = X_i' \cdot c ; \quad _iM_y = M_i' \cdot c ; \quad _iM_z = 0 .$$

Satz 2. Allen Vektoren, die derselben Geraden parallel sind, entsprechen Stäbe desselben Trägers.

Die Richtigkeit dieser Behauptung geht unmittelbar aus den am Schluß des vorigen Paragraphen angegebenen Konstruktionen hervor, da bei ihnen zur Bestimmung des Trägers des gesuchten Bildstabes nicht die Größe, sondern nur die Richtung des abzubildenden Vektors berücksichtigt wird.

Satz 3. Allen Vektoren, die derselben Ebene E parallel sind, entsprechen Stäbe, die in einer Ebene liegen (Abbildung A) bzw. sich in einem Punkt schneiden (Abbildung B).

Beweis: Wählt man zwei der Ebene E parallele Richtungen g_1' und g_2'[2]), so lassen sich alle zur Ebene E parallele Vektoren als Summe zweier Vektoren dieser Richtungen auffassen, die entsprechenden Bildstäbe also als Summe zweier Stäbe bestimmter Träger. Diese Summe liegt aber in der Ebene der beiden Komponenten (Abbildung A) und geht durch deren Schnittpunkt (Abbildung B).

3. Lösung der Gleichgewichtsaufgabe an einem Fachwerkknoten. Bei einem nach dem erstem Bildungsgesetz (dreistäbiger Anschluß) gebauten Fachwerk lassen sich die Stabkräfte bestimmen durch wiederholte Lösung der Aufgabe:

[1]) Die Summe von Vektoren genügt den drei Komponentenbedingungen, die Summe von Stäben muß außerdem noch drei Momentenbedingungen erfüllen.

[2]) Die Richtung einer Geraden legen wir durch den zu dieser Geraden parallelen Einheitsvektor fest. Einheitsvektoren bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben.

Es ist eine Kraft $\overline{P}'$ ins Gleichgewicht zu setzen mit drei Kräften, die in drei gegebenen sich auf der Wirkungslinie von $\overline{P}'$ schneidenden Geraden liegen (Abb. 3). Wir bilden zunächst die gegebenen Geraden sowie die Kraft $\overline{P}'$ nach Art der Abbildung A ab (Abb. 4), wobei wir die Abbildungskonstante c gleich der Entfernung des Kraftangriffspunktes von der Grundrißebene wählen. Dem Gleichgewicht der im Raum gelegenen Kräfte entspricht dann das Gleichgewicht ihrer Bildkräfte, die zur z-Achse parallel sind. Um die gesuchten Kräfte zu finden, setzt man zunächst die Bildkraft $\overline{P}$ ins Gleichgewicht mit zwei Kräften $\overline{S}_3$ und $\overline{H}$, von denen die eine s_3, die andere die Schnittlinie h der Ebene durch s_1 und s_2 mit der Ebene durch $\overline{P}$ und s_3 zur Wirkungslinie hat; die Hilfskraft $\overline{H}$ zerlegt man dann in zwei Kräfte $\overline{S}_1$ und $\overline{S}_2$, die die Geraden s_1 und s_2 zu Wirkungslinien haben. Die so gefundenen Kräfte $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ und $\overline{S}_3$ sind dann die Bilder der gesuchten Kräfte $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2'$ und $\overline{S}_3'$. Die Aufgabe kann graphisch und analytisch gelöst werden, jedoch empfiehlt sich die analytische Lösung mittels Momentenbedingungen. Die hierzu erforderlichen Hebelarme können aus der Zeichnung abgemessen werden. Eine wesentliche Vereinfachung der Konstruktion tritt bei Verwendung der Abbildung A nicht ein.

Abb. 3.

Abb. 4.

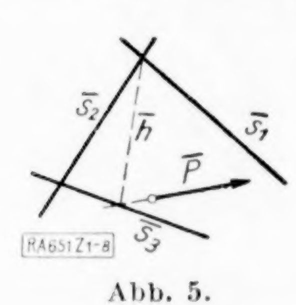


Abb. 5.

Bilden wir dagegen das System nach Art der Abbildung B ab, so entspricht dem Gleichgewicht der im Raume gelegenen Kräfte das Gleichgewicht ihrer in einer Ebene gelegenen Bildkräfte (Abb. 5). Um die gesuchten Kräfte zu bestimmen, setzt man die Bildkraft $\overline{P}$ ins Gleichgewicht mit zwei Kräften $\overline{S}_3$ und $\overline{H}$, von denen die eine s_3, die andere die Verbindungslinie des Schnittpunktes von s_1 und s_2 mit dem Schnittpunkt von $\overline{P}$ und s_3 zur Wirkungslinie hat; die Hilfskraft $\overline{H}$ zerlegt man dann in zwei Kräfte $\overline{S}_1$ und $\overline{S}_2$, die s_1 und s_2 zu Wirkungslinien haben. Die so gefundenen Kräfte $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2'$ und $\overline{S}_3'$ sind die Bilder der gesuchten Kräfte $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2'$ und $\overline{S}_3'$. Die Konstruktion der Schnittlinien zweier Ebenen wird also beim Gebrauch der Misesschen Abbildung ersetzt durch das Ziehen der Verbindungslinie zweier Punkte. Daher empfiehlt es sich, die Kräfte eines Raumfachwerks aus der Misesschen Abbildung dieses Fachwerks zu bestimmen.

4. Das innere Produkt zweier Vektoren. Um das innere Produkt zweier Vektoren $\overline{P}_1'$ und $\overline{P}_2'$ zu bestimmen, bilden wir den einen, etwa $\overline{P}_1'$, nach Art der Abbildung A ab und den anderen $\overline{P}_2'$ nach Art der Abbildung B. Das innere Produkt hat die Größe:

$$\overline{P}_1' \cdot \overline{P}_2' = X_1' \cdot X_2' + Y_1' \cdot Y_2' + Z_1' \cdot Z_2'.$$

Drücken wir hierin die Komponenten der Vektoren durch die Elemente ihrer Bilder aus:

$$X_1' = -\frac{1}{c} \cdot y_1 \cdot Z_1 \qquad X_2' = X_2$$

$$Y_1' = +\frac{1}{c} \cdot x_1 \cdot Z_1 \qquad Y_2' = Y_2$$

$$Z_1' = Z_1 \qquad Z_2' = \frac{1}{c}\,(X_2\, y_2 - Y_2\, x_2),$$

wo x_1, y_1 der Bildpunkt von $\overline{P}_1'$ und x_2, y_2 ein Punkt des Trägers von $\overline{P}_2'$ ist, so nimmt das innere Produkt die Form an:

$$\overline{P}_1' \cdot \overline{P}_2' = \frac{Z_1}{c} \cdot \left[X_2\,(y_2 - y_1) - Y_2\,(x_2 - x_1) \right].$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist das statische Moment des Bildstabes $\overline{P}_2$ in bezug auf den Bildpunkt des Vektors $\overline{P}_1'$. Es liegt nahe, das Produkt dieses Momentes

mit $\overline{Z}_1$ das »statische Moment des Stabes $\overline{P}_2$ in bezug auf den Stab $\overline{P}_1$« zu nennen; nach dem Vertauschungssatz der Vektoralgebra ist es gleich dem statischen Moment des Stabes $\overline{P}_1$ in bezug auf den Stab $\overline{P}_2$. Man erhält also das innere Produkt zweier Vektoren, indem man den einen nach Art der Abbildung A, den anderen nach Art der Abbildung B abbildet und das statische Moment des Bildstabes des einen in bezug auf den Bildstab des anderen durch die Abbildungskonstante c dividiert.

Stehen insbesondere zwei Vektoren aufeinander senkrecht, so verschwindet ihr inneres Produkt; es muß also der Bildpunkt des einen Vektors auf dem Träger des Bildstabes des anderen liegen.

Da das innere Produkt zweier Vektoren (Arbeit) aus einem äußeren Produkt (Moment) bestimmt wird, geht bei Verwendung dieser Abbildungsweisen das Prinzip der virtuellen Verrückungen über in eine Momentengleichgewichtsbedingung. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß hier eine Analogie vorliegt mit der Verwendung der »gedrehten Geschwindigkeiten« in der Kinematik des ebenen Fachwerkes. Auch dort ist die Arbeit einer Kraft proportional dem Moment dieser Kraft in bezug auf den Endpunkt der gedrehten Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

5. Bestimmung der Verschiebung eines Fachwerkknotens. Betrachten wir den Stab $\overline{L}_{i,k}'$ der den Knoten i mit dem Knoten k verbindet und von i nach k gerichtet sein soll, so daß also: $\overline{L}_{i,k}' = -\overline{L}_{k,i}'$ ist.

Sind $\overline{V}_i'$ und $\overline{V}_k'$ die Verschiebungen seiner Endpunkte, so stellt die geometrische Differenz $(\overline{V}_k' - \overline{V}_i')$ die Verschiebung des Punktes k gegenüber dem Punkte i dar. Diese Verschiebung läßt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine senkrecht, die andere parallel zu $\overline{L}_{i,k}'$ ist. Jene rührt von der Drehung, diese von der Verlängerung $\varDelta L_{i,k}$ des Stabes $\overline{L}_{i,k}'$ her, und zwar ist:

$$\overline{L}_{i,k}' \cdot (\overline{V}_k' - \overline{V}_i') = L_{i,k} \cdot \varDelta L_{i,k} \quad \text{(Grundgleichung).}$$

Die dabei auftretenden inneren Produkte können in der oben angegebenen Weise bestimmt werden, und zwar bilden wir im folgenden die Verschiebungen nach Art der Abbildung A, die Fachwerkstäbe sowie die Stabkräfte nach Art der Abbildung B ab. Ist insbesondere $\varDelta L_{i,k} = 0$, so vereinfacht sich die Grundgleichung zu:

$$\overline{L}_{i,k}' \cdot \overline{V}_i' = \overline{L}_{i,k}' \cdot \overline{V}_k',$$

d. h. die Bildstäbe der Verschiebungen zweier Punkte eines starren Stabes haben in Bezug auf seinen Bildstab gleiches Moment.

Wir sind nun imstande, den Verschiebungsplan eines nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebauten Raumfachwerkes zu zeichnen. Ist ein Punkt 4 durch drei Stäbe an das übrige Fachwerk angeschlossen, und sind die Verschiebungen $\overline{V}_1'$, $\overline{V}_2'$ und $\overline{V}_3'$ der Punkte 1, 2 und 3 bekannt, sowie die Längenänderungen der Stäbe $\overline{L}_{1,4}'$, $\overline{L}_{2,4}'$ und $\overline{L}_{3,4}'$, so kann die Verschiebung des Punktes 4 wie folgt ermittelt werden:

Wir berücksichtigen zunächst nur die Verschiebung des Punktes 1 und die Längenänderung des Stabes $\overline{L}_{1,4}'$. Die durch diese Ursachen bedingte Verschiebung des Punktes 4 sei mit ${}_1\overline{V}_4'$ bezeichnet, sie steht senkrecht auf der Ebene der Stäbe $\overline{L}_{2,4}'$ und $\overline{L}_{3,4}'$; der Bildpunkt dieser Verschiebung liegt also im Schnittpunkt der entsprechenden Bildstäbe. Die Größe des Bildstabes ${}_1\overline{V}_4$ kann berechnet werden aus der Gleichung:

$$\overline{L}_{1,4}' \cdot ({}_1\overline{V}_4' - \overline{V}_1') = L_{1,4} \cdot \varDelta L_{1,4}.$$

In entsprechender Weise werden dann nacheinander noch die Verschiebungen der Punkte 2 und 3 sowie die Längenänderungen der Stäbe $\overline{L}_{2,4}'$ und $\overline{L}_{3,4}'$ berücksichtigt. Die Gesamtverschiebung des Punktes 4 erhält man dann durch Zusammensetzen der drei Teilverschiebungen.

6. Der Einflußplan für eine Stabkraft. Erteilen wir einem Stab $\overline{L}_{i,k}'$ eines Raumfachwerkes die Längenänderung $\varDelta L_{i,k} = +1$ und zeichnen den entsprechenden Verschiebungsplan, so kann aus ihm der Einfluß einer beliebigen Belastung auf die Stabkraft $S_{i,k}$ entnommen werden. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist nämlich:

$$S_{i,k} = \Sigma\, \overline{P}' \cdot \overline{V}',$$

wenn $\overline{P'}$ die wirkenden Kräfte und $\overline{V'}$ die Verschiebungen ihrer Angriffspunkte infolge der Verlängerung $\Delta L_{i,k} = 1$ sind.

Da bei der Bestimmung der inneren Produkte $\overline{P'} \cdot \overline{V'}$ das Moment des Bildstabes von $\overline{V'}$ in bezug auf den von $\overline{P'}$ durch die Abbildungskonstante c dividiert werden muß, gibt man am besten schon die durch c dividierten Größen der Bildstäbe $\overline{V}$ im Einflußplan an. Man erhält alsdann den Einfluß einer im Knoten m wirkenden Kraft $\overline{P_m}'$ auf die Stabkraft $S_{i,k}$ indem man das Moment des Bildstabes $\overline{P_m}$ in bezug auf den Bildstab $\overline{V_m}$ bildet.

7. Die elastischen Gewichte. Der Einflußplan für die Senkung eines Fachwerkknotens. Wir berücksichtigen zunächst nur die Elastizität eines Stabes, etwa des Stabes $L_{i,k}'$, und nehmen alle anderen Stäbe vorläufig als starr an.

Infolge der Längenänderung $\Delta L_{i,k} = +1$ erfährt der Knoten m des Fachwerks die Verschiebung ${}_{i,k}\overline{V_m}'$, die aus dem Einflußplan für die Stabkraft $S_{i,k}$ bekannt ist, und ebenso der Knoten n die Verschiebung ${}_{i,k}\overline{V_n}'$. Greift nun am Knoten m eine beliebige Kraft $\overline{P_m}'$ an, so erhält der Stab $L_{i,k}'$ eine Stabkraft, die gleich dem durch die Abbildungskonstante c dividierten Moment des Bildstabes ${}_{i,k}\overline{V_m}$ in bezug auf die Bildkraft $\overline{P_m}$ ist. Infolge dieser Stabkraft verlängert sich der Stab $L_{i,k}'$ um:

$$\Delta L_{i,k} = P_m \cdot r \cdot \frac{{}_{i,k}V_m \cdot L_{i,k}}{c \cdot E \cdot F_{i,k}},$$

wobei r der Hebelarm des Bildstabes ${}_{i,k}\overline{V_m}$ in bezug auf die Bildkraft $\overline{P_m}$ ist, und der Knoten n erfährt die Verschiebung:

$${}_{i,k}\overline{W_n}' = \Delta L_{i,k} \cdot {}_{i,k}\overline{V_n}'.$$

Wir bestimmen nun die Projektion dieser Verschiebung auf eine bestimmte Richtung, die wir durch den entsprechenden Einheitsvektor $\overline{g'}$ festlegen. Diese Projektion ist gleich dem inneren Produkt ${}_{i,k}\overline{W_n}' \cdot \overline{g'}$, kann also gefunden werden, indem man das statische Moment des Bildstabes von ${}_{i,k}\overline{W_n}'$ in bezug auf den Bildstab von $\overline{g'}$ durch die Abbildungskonstante c dividiert. Wir berücksichtigen nun, daß im Einflußplan unmittelbar die durch c dividierten Größen der Verschiebungsbildstäbe angegeben sind, und setzen:

$${}_{i,k}\overline{G_m} = {}_{i,k}\overline{V_m} \cdot \sqrt{\frac{L_{i,k}}{E \cdot F_{i,k}}}.$$

Diese Größe nennen wir das »elastische Gewicht des Stabes $L_{i,k}'$ in bezug auf den Knoten m« und lassen es im Bildpunkt der Verschiebung ${}_{i,k}\overline{V_m}'$ angreifen. Die Projektion der durch die Last $\overline{P_m}'$ hervorgerufenen Verschiebung ${}_{i,k}\overline{W_n}'$ auf die Richtung $\overline{g'}$ wird dann gefunden als Produkt aus dem statischen Moment des elastischen Gewichtes ${}_{i,k}\overline{G_m}$ in bezug auf die Bildkraft $\overline{P_m}$ und dem statischen Moment des elastischen Gewichtes ${}_{i,k}\overline{G_n}$ in bezug auf den Bildstab von $\overline{g'}$ [1]).

In vielen Fällen kommt es nur auf die vertikalen Komponenten der Verschiebungen, die Hebungen, an. Der Bildstab des Einheitsvektors $\overline{g'}$ wird dann zum Stäbepaar $M_z = c$ der Bildebene, und das statische Moment des elastischen Gewichtes ${}_{i,k}\overline{G_n}$ in bezug auf dieses Stäbepaar ist gleich dem c fachen Gewicht. Wir setzen:

$${}_{i,k}G_{m,n} = {}_{i,k}V_m \cdot {}_{i,k}V_n \cdot \frac{c \cdot L_{i,k}}{E \cdot F_{i,k}}$$

und nennen diese Größe das »elastische Gewicht zweiter Ordnung des Stabes $L_{i,k}'$ in bezug auf die Knoten m und n«.

[1]) Es liegt hier eine gewisse Analogie mit der Theorie des ebenen Fachwerks vor. Lassen wir nämlich die äußere Kraft ebenfalls im Punkte n angreifen, so wird die Projektion der Verschiebung dieses Punktes auf eine bestimmte Richtung $\overline{g'}$ gefunden als Zentrifugalmoment der Größe ${}_{i,k}V_n^2 \cdot \frac{L_{i,k}}{E \cdot F_{i,k}}$, die im Bildpunkt von ${}_{i,k}\overline{V_n}'$ angreift, in bezug auf die Bildstäbe $\overline{P_n}$ und $\overline{g}$ als Achsen. Die weitere Verfolgung dieser Analogie würde auf die Ermittlung der Verschiebung des Punktes n infolge einer an ihm angreifenden Last aus einer Elastizitätsellipse führen. (Vergl. z. B. W. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, Teil II, Kap. 3.)

Die Hebung des Knotens n infolge der Last $\overline{P}_m'$ ist dann gleich dem statischen Moment dieses im Bildpunkt der Verschiebung ${}_{i,k}V_m'$ angreifenden elastischen Gewichtes zweiter Ordnung in bezug auf die Bildkraft $\overline{P}_m$. Berücksichtigen wir nun noch die Elastizität der anderen Fachwerkstäbe, so müssen wir über alle entsprechenden statischen Momente summieren. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Resultante $\overline{R}_{m,n}$ der elastischen Gewichte der einzelnen Stäbe in bezug auf die Knoten m und n und berechnen ihr Moment in bezug auf die Bildkraft $\overline{P}_m$. Ermittelt man die entsprechenden Resultanten $\overline{R}_{p,n}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ für an anderen Punkten p angreifende Lasten, so erhält man einen Einflußplan für die Hebung des Punktes n. Aus ihm wird die Hebung dieses Punktes infolge einer am Knoten p angreifenden Last P_p' gefunden als statisches Moment des »Hebungsgewichtes« $\overline{R}_{p,n}$ in bezug auf die Bildkraft $\overline{P}_p$.

Abschnitt II: Anwendungen.

1. Einflußplan für einen Gratstab einer Schwedlerkuppel. Für die Stabkraft $S_{1,7}$ der in Abb. 1, Tafel 1, dargestellten Schwedlerkuppel soll der Einflußplan bestimmt werden. Wir erteilen dem Stab $\overline{L}_{1,7}'$ die Verlängerung $\Delta L_{1,7} = +1$ und zeichnen den zugehörigen Verschiebungsplan. Zu diesem Zwecke bilden wir die Stäbe der Kuppel nach Art der Abbildung B ab, wobei wir die Abbildungskonstante zu $c = 4$ wählen. Es entsteht so die Abb. 2, Tafel 1, in der der Uebersichtlichkeit halber die einzelnen Bildstäbe statt mit $\overline{L}_{i,k}$ kurz mit i, k bezeichnet wurden. Ferner wurden die Bildstäbe der Diagonalen nur dann eingezeichnet, wenn sich dies im Verlauf der Konstruktion des Verschiebungsplanes als nötig erwies.

Der Punkt 8 ist durch die starren Stäbe $\overline{L}_{1,8}'$ und $\overline{L}_{2,8}'$ an die festen Punkte 1 und 2 angeschlossen, kann sich also nur auf dem Lot zur Ebene dieser beiden Stäbe bewegen. Der Bildpunkt seiner Verschiebung liegt also im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L}_{1,8}$ und $\overline{L}_{2,8}$. Eine entsprechende Ueberlegung zeigt, daß der Bildpunkt der Verschiebung $\overline{V}_9'$ im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L}_{2,9}$ und $\overline{L}_{3,9}$ liegt. Da ferner die Punkte 8 und 9 durch den starren Stab $\overline{L}_{8,9}'$ verbunden sind, müssen die Bildstäbe ihrer Verschiebungen in bezug auf den Bildstab $\overline{L}_{8,9}$ gleiches Moment haben. Nun liegt aber der Bildpunkt von V_9' auf $\overline{L}_{8,9}$, es muß also $V_8 = 0$ sein, während V_9 jede beliebige Größe haben kann. Durch entsprechende Ueberlegungen findet man:

$$V_9 = V_{10} = V_{11} = 0\,, \qquad \text{sowie} \qquad V_{15} = V_{16} = 0.$$

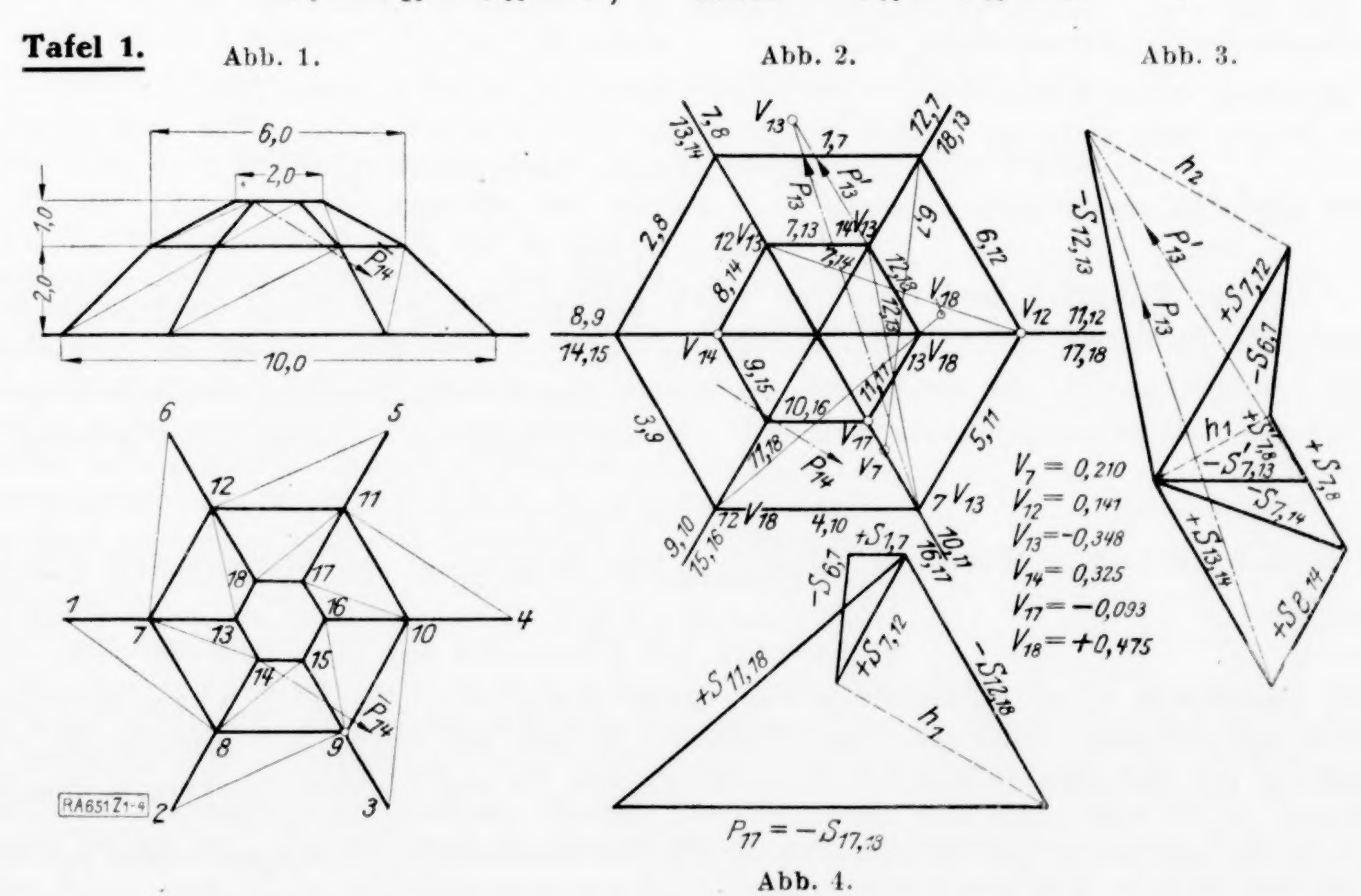


Abb. 4.

Da der Punkt 7 durch die starren Stäbe $\overline{L_{6,7}}'$ und $\overline{L_{7,8}}'$ an die festen Punkte 6 und 8 angeschlossen ist, kann er sich nur auf dem Lot zur Ebene dieser beiden Stäbe bewegen, der Bildpunkt seiner Verschiebung liegt also im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L_{6,7}}$ und $\overline{L_{7,8}}$. Die Größe des Bildstabes der gesuchten Verschiebung $\overline{V_7}'$ folgt aus der Grundgleichung:

$$\overline{L_{1,7}}' \cdot \overline{V_7}' = L_{1,7} \cdot \Delta L_{1,7} = 2{,}828 .$$

Das dabei zu bestimmende innere Produkt wird gefunden als statisches Moment des Stabes V_7 in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{1,7}}$ dividiert durch die Abbildungskonstante c, es ist also[1]):

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 6{,}717 \cdot V_7 = 2{,}828$$

und daher:

$$V_7 = + 0{,}842 .$$

Da der Punkt 12 durch die starren Stäbe $\overline{L_{5,12}}'$ und $\overline{L_{6,12}}'$ an die festen Punkte 5 und 6 angeschlossen ist, liegt der Bildpunkt seiner Verschiebung im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L_{5,12}}$ und $\overline{L_{6,12}}$. Da ferner die Punkte 7 und 12 durch den starren Stab $\overline{L_{7,12}}'$ verbunden sind, müssen die Bildstäbe ihrer Verschiebungen in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{7,12}}$ gleiches Moment haben, es ist also:

$$4{,}000 \cdot V_{12} = 2{,}683 \cdot V_7 , \qquad V_{12} = + 0{,}565 .$$

Der Punkt 14 ist durch die starren Stäbe $\overline{L_{8,14}}'$ und $\overline{L_{15,14}}$ mit den festen Punkten 8 und 15 verbunden, der Bildpunkt seiner Verschiebung fällt daher mit dem Schnittpunkt der entsprechenden Bildstäbe zusammen. Da der starre Stab $\overline{L_{7,14}}'$ die Punkte 7 und 14 verbindet, haben die Bildstäbe der Verschiebungen dieser Punkte in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{7,14}}$ gleiches Moment:

$$2{,}283 \cdot V_{14} = 3{,}550 \cdot V_7 , \qquad V_{14} = + 1{,}308 .$$

Der Punkt 13 ist durch die Stäbe $\overline{L_{7,13}}'$ und $\overline{L_{12,13}}'$ sowie $\overline{L_{13,14}}'$ mit den Punkten 7, 12 und 14 verbunden. Diese Punkte erleiden alle Verschiebungen, deren Bildstäbe bereits bekannt sind. Berücksichtigen wir zunächst nur die Verschiebungen $\overline{V_7}'$ und nehmen wir die Punkte 12 und 14 vorübergehend als fest an, so liegt der Bildpunkt der dieser Annahme entsprechenden Verschiebung ${}_7\overline{V_{13}}'$ im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L_{12,13}}$ und $\overline{L_{13,14}}$, und die Bildstäbe ${}_7V_{13}$ und V_7 haben in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{7,13}}$ gleiches Moment:

$$6{,}000 \cdot {}_7V_{13} = 4{,}717 \cdot V_7 , \qquad {}_7V_{13} = + 0{,}662 .$$

In entsprechender Weise findet man:

$$2{,}283 \cdot {}_{12}V_{13} = - 3{,}017 \cdot V_{12} , \qquad {}_{12}V_{12} = - 0{,}746$$

und

$$2{,}000 \cdot {}_{14}V_{13} = - 2{,}000 \cdot V_{14} , \qquad {}_{14}V_{13} = - 1{,}308 .$$

Durch Addition ergibt sich:

$$V_{13} = - 1{,}392 .$$

Da die Punkte 7 und 13 durch einen starren Stab miteinander verbunden sind, müssen die Bildstäbe ihrer Verschiebungen in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{7,13}}$ gleiches Moment haben, und da die Größe von $\overline{V_{13}}$ bereits ermittelt ist, kann aus dieser Bedingung der Abstand a des Bildpunktes von $\overline{V_{13}}'$ von dem Bildstab $\overline{L_{7,13}}$ bestimmt werden, es ergibt sich:

$$a = - 2{,}853 \text{ m}$$

und in entsprechender Weise der Abstand b des Bildpunktes von $\overline{V_{13}}'$ von dem Bildstab $\overline{L_{13,14}}$ zu:

$$b = + 1{,}877 \text{ m}.$$

Der Punkt 18 ist durch die starren Stäbe $\overline{L_{11,18}}'$, $\overline{L_{12,18}}'$ und $\overline{L_{13,18}}'$ an die Punkte 11, 12 und 13 angeschlossen. Da der Punkt 11 fest ist, liegt der Bildpunkt der Verschiebung $\overline{V_{18}}'$ auf dem Bildstab $\overline{L_{11,18}}$. Die Punkte 12 und 13 erleiden Verschiebungen,

[1]) Die zur Berechnung der Verschiebungsbildstäbe erforderlichen Hebelarme wurden aus einer genauen Zeichnung im Maßstab 1 : 25 entnommen.

deren Bildstäbe bekannt sind. Berücksichtigt man zunächst nur die Verschiebung V_{12}' und denkt sich den Punkt 13 vorübergehend festgehalten, so liegt der Bildpunkt von ${}_{12}V_{18}'$ im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L}_{11,18}$ und $\overline{L}_{13,18}$. Da die Bildstäbe der Verschiebungen ${}_{12}V_{18}'$ und V_{12}' in bezug auf den Bildstab $\overline{L}_{12,18}$ gleiches Moment haben müssen, ist:

$$6{,}000 \cdot {}_{12}V_{18} = -\,2{,}000 \cdot V_{12}$$

also:

$${}_{12}V_{18} = -\,0{,}188.$$

Entsprechend findet man:

$${}_{13}V_{18} = +\,2{,}080$$

und durch Addition: $V_{18} = +\,1{,}892.$

Da die Bildstäbe der Verschiebungen $\overline{V}_{13}'$ und $\overline{V}_{18}'$ in bezug auf den Bildstab $\overline{L}_{13,18}$ gleiches Moment haben müssen, kann der Abstand a des Bildpunktes von V_{18}' vom Bildstab $\overline{L}_{13,18}$ berechnet werden:

$$1{,}892 \cdot a = -\,2{,}983 \cdot V_{13}\,, \qquad a = +\,2{,}197 \text{ m}.$$

Damit ist die Lage des Bildpunktes von V_{18}', der ja auf dem Bildstab $\overline{L}_{11,18}$ liegen muß, festgelegt.

Der Punkt 17 ist durch die starren Stäbe $\overline{L}_{10,17}'$ und $\overline{L}_{11,17}'$ an die festen Punkte 10 und 11 angeschlossen, der Bildpunkt seiner Verschiebung liegt also im Schnittpunkt der entsprechenden Bildstäbe. Ferner sind die Punkte 17 und 18 durch den starren Stab $L_{17,18}'$ verbunden, die Bildstäbe ihrer Verschiebungen haben daher in bezug auf den Bildstab $\overline{L}_{17,18}$ gleiches Moment:

$$2{,}000 \cdot V_{17} = -\,0{,}400 \cdot V_{18}\,, \qquad V_{17} = -\,0{,}372.$$

Der gesuchte Verschiebungsplan ist hiermit gezeichnet, man kann aus ihm den Einfluß einer beliebigen Belastung auf die Stabkraft $S_{1,7}$ entnehmen. Wirkt z. B. im Punkte 14 eine Kraft P_{14}', so bilden wir sie nach Art der Abbildung B ab und bestimmen das durch die Abbildungskonstante c dividierte Moment ihrer Bildkraft in bezug auf den Bildstab der Verschiebung V_{14}'. Man erhält so die durch die Last P_{14}' im Stabe $L_{1,7}'$ hervorgerufene Stabkraft. Um die Division durch die Abbildungskonstante c zu vermeiden, sind im Einflußplan unmittelbar die durch c dividierten Größen der Verschiebungsbildstäbe $\overline{V}$ angegeben, so daß nur noch die Berechnung des Momentes erforderlich ist.

Will man die Lage des Bildpunktes einer Verschiebung prüfen, etwa die von V_{13}', so kann das auf folgende Weise geschehen:

Wir nehmen an, es wirke lediglich im Punkte 13 eine Last, deren Richtung wir so bestimmen wollen, daß der Stab $L_{1,7}'$ spannungslos bleibt; der Bildpunkt von V_{13}' muß daher auf dem Bildstab dieser Kraft liegen. Wenn nur im Punkte 13 eine Last angreift, so bleiben bei einer Schwedlerkuppel bekanntlich die in Abb. 6 punktiert gezeichneten Stäbe spannungslos. Die Bildkräfte $S_{6,7}$, $S_{7,12}$, $S_{7,13}$, $S_{7,14}$, $S_{7,8}$ und $S_{1,7}$, der am Knoten 7 angreifenden Kräfte müssen im Gleichgewicht stehen ($S_{17} = 0$). Nun schneiden sich aber die Bildkräfte $S_{7,13}$, $S_{7,14}$, $S_{7,8}$ in einem Punkte, so daß wir die angenommene Bildkraft $S_{6,7}$ ins Gleichgewicht setzen können mit $S_{7,12}$ und einer Kraft H_1, deren Wirkungslinie die Verbindungslinie h_1 des Schnittpunktes von $S_{6,7}$ und $S_{7,12}$ mit dem Schnittpunkt von $S_{7,13}$ und $S_{7,8}$ ist. Diese Kraft H_1 ist dann die Resultierende der Bildkräfte $S_{7,13}$, $S_{7,14}$ und $S_{7,8}$. In entsprechender Weise erhält man am Knoten 12 die Bildkraft $S_{12,13}$. Um weiter zu kommen, müssen wir noch die Größe einer weiteren Stabkraft beliebig annehmen; setzen wir etwa $S_{7,13} = 0$, so können wir die Bildkräfte $S_{7,8}$ und $S_{7,14}$ und daraus wiederum die Bildkraft $S_{13,14}$ bestimmen. Um Gleichgewicht herzustellen, muß nun am Knoten 13 eine Kraft P_{13}' angebracht werden, die der Resultierenden aus $S_{12,13}$ und $S_{13,14}$ entgegengesetzt gleich ist. Die Bildkraft P_{13} dieser Kraft geht durch den Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L}_{12,13}$ und $\overline{L}_{13,14}$, auf ihr muß der Bildpunkt von V_{13}' liegen.

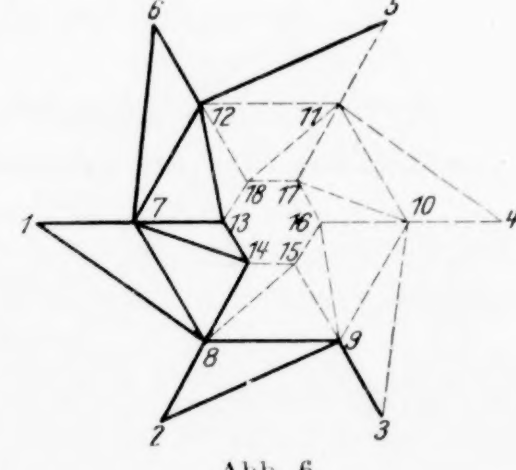


Abb. 6.

Macht man an Stelle der obigen Annahme eine andere, etwa $S_{7,14} = 0$, so erhält man eine andere Gleichgewicht herstellende Kraft P_{13}'', die aus dieser Annahme folgenden Stabkräfte sind von den der ersten Annahme entsprechenden durch einen Strich (′) unterschieden. Die Bildkraft P_{13}' dieser Kraft geht ebenfalls durch den Bildpunkt von V_{13}', dessen Lage nunmehr geprüft ist.

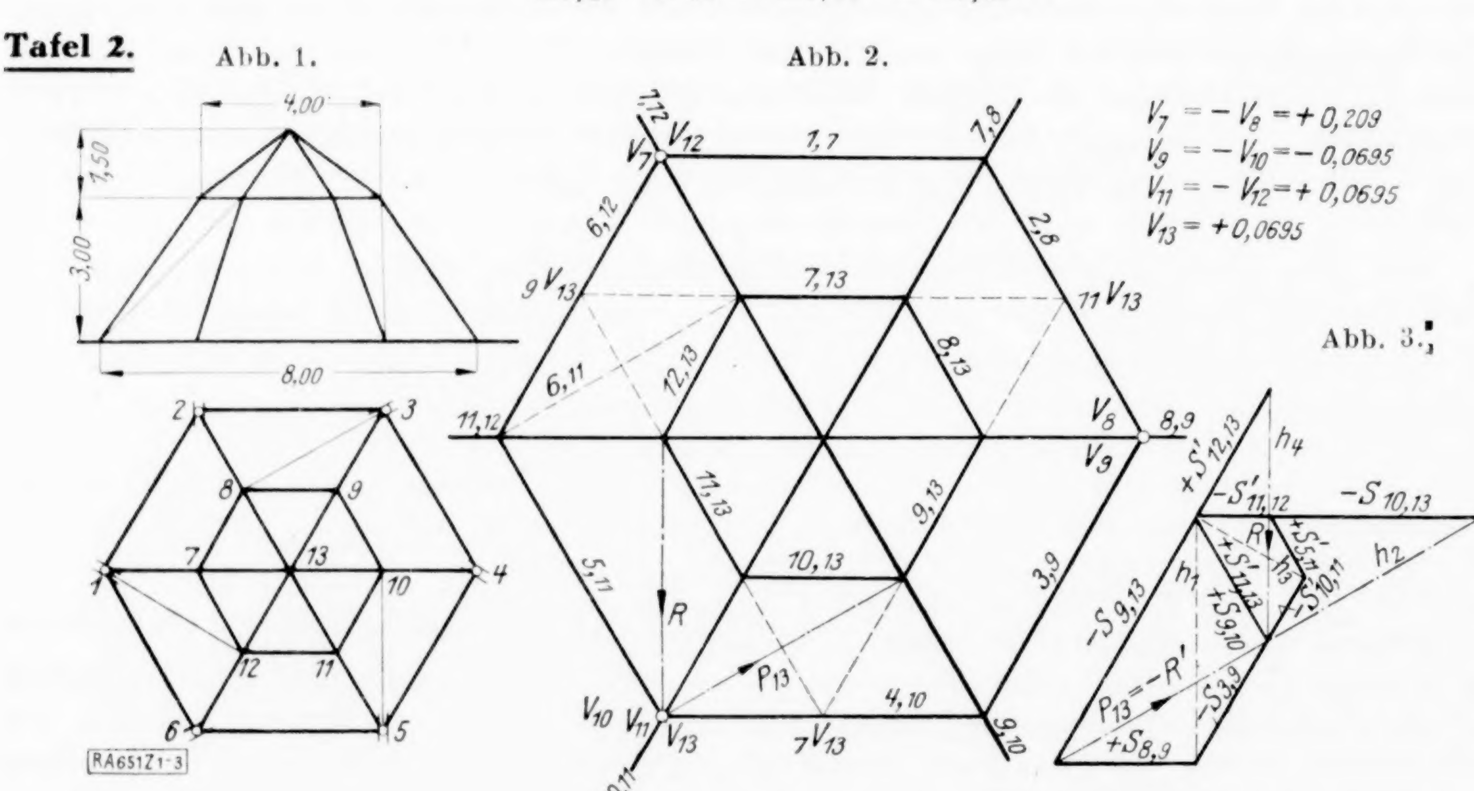
Will man außerdem noch die Größe des Bildstabes einer Verschiebung, etwa die von V_{17}', prüfen, so zeichnet man für eine beliebige am Knoten 17 angreifende Last den Kräfteplan, und vergleicht die so gefundene Kraft $S_{1,7}$ mit der aus dem Einflußplan bestimmten. In Abb. 4, Tafel 1, ist dies für eine am Knoten 17 angreifende, in Richtung des Stabes $L_{17,18}'$ fallende Last geschehen; die beiden Werte für $S_{1,7}$ stimmen überein.

2. Einflußplan für einen Gratstab einer Zeltkuppel. Für den Stab $L_{7,13}$ der in Abb. 1, Tafel 2, dargestellten Kuppel soll der Einflußplan gezeichnet werden. Wir bilden die Kuppel nach Art der Abbildung B ab, indem wir die Abbildungskonstante zu $c = 4{,}0$ m wählen (Abb. 2, Tafel 2).

Der Fußring der Kuppel ist bei Annahme starrer Ringstäbe durch die sechs Rollenlager unverschieblich gelagert. Wir erteilen nun dem Stabe $L_{1,7}'$ die Längenänderung $\Delta L_{7,13} = +1$ und zeichnen den zugehörigen Verschiebungsplan. Während wir beim vorigen Beispiel diesen Verschiebungsplan unmittelbar konstruieren konnten, müssen wir hier Stabvertauschungen vornehmen, um zum Ziel zu gelangen, und zwar beseitigen wir die drei Stäbe $L_{8,13}'$, $L_{10,13}'$ und $L_{12,13}'$ und ziehen an ihrer Stelle die Diagonalen $L_{2,7}'$, $L_{4,9}'$ und $L_{6,11}'$ ein[1]). Erleidet nun lediglich der Stab $L_{7,13}'$ die Längenänderung $\Delta L_{7,13} = +1$, während alle anderen Stäbe starr sind, so liegen die Knotenpunkte des mittleren Ringes fest, und es erfährt nur der Punkt 13 eine Verschiebung. Der Bildstab ${}_7V_{13}$ geht durch den Schnittpunkt der Bildstäbe $L_{9,13}'$ und $L_{11,13}'$, seine Größe kann berechnet werden aus der Grundgleichung:

$$L_{7,13}' \cdot {}_7V_{13}' = L_{7,13} \cdot \Delta L_{7,13} \,.$$

Tafel 2. Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.



Man findet die durch die Abbildungskonstante c dividierte Größe dieses Bildstabes zu:

$${}_7V_{13} = +0{,}139 \,.$$

Infolge dieser Verschiebung würden die beseitigten Stäbe $L_{8,13}'$, $L_{10,13}'$ und $L_{12,13}'$ Längenänderungen erleiden, deren Größen aus den Grundgleichungen für diese Stäbe berechnet werden können. Es ergibt sich:

$$\Delta L_{8,13} = +0{,}668, \qquad \Delta L_{10,13} = -0{,}334, \qquad \Delta L_{12,13} = +0{,}668.$$

[1]) Um die Symmetrie des Systemes besser ausnutzen zu können, wurden hier drei Stabvertauschungen vorgenommen, obgleich man auch mit weniger auskommen kann.

Alsdann erteilen wir dem Hilfsstab $L_{6,11}'$ die Längenänderung $\varDelta L_{6,11} = +1$ und betrachten alle anderen Stäbe, auch den Stab $L_{7,13}'$, als starr. Unter diesen Voraussetzungen liegen die Punkte 7, 8, 9 und 10 fest. Es läßt sich dies in genau der gleichen Weise zeigen, wie für die Punkte 8, 9, 10 und 11 der Schwedlerkuppel des vorigen Beispiels. Der Punkt 11 ist durch die starren Stäbe $L_{5,11}'$ und $L_{10,11}'$ an die festen Punkte 5 und 10 angeschlossen; der Bildpunkt seiner Verschiebung liegt also im Schnittpunkt der entsprechenden Bildstäbe. Die Größe des Bildstabes dieser Verschiebung ${}_{11}V_{11}'$ [1]) folgt aus der Grundgleichung für den Stab $L_{6,11}'$ zu:

$$ {}_{11}V_{11} = +0{,}191. $$

Der Punkt 12 ist durch die starren Stäbe $L_{11,12}'$ und $L_{6,12}'$ an die festen Punkte 1 und 6 angeschlossen, der Bildpunkt seiner Verschiebung liegt daher im Schnittpunkt der entsprechenden Bildstäbe. Die Punkte 11 und 12 sind durch den starren Stab $L_{11,12}'$ verbunden, die Bildstäbe ihrer Verschiebungen haben also in bezug auf den Bildstab $L_{11,12}$ gleiches Moment:

$$ {}_{11}V_{12} = -{}_{11}V_{11} = -0{,}191. $$

Da der Punkt 13 durch die starren Stäbe $L_{7,13}'$ und $L_{9,13}'$ an die festen Punkte 7 und 9 angeschlossen ist, liegt der Bildpunkt seiner Verschiebung im Schnittpunkt der Bildstäbe $L_{7,13}$ und $L_{9,13}$. Ferner sind die Punkte 11 und 13 durch den starren Stab $L_{11,13}'$ verbunden, es haben also die Bildstäbe ihrer Verschiebungen in bezug auf den Bildstab $L_{11,13}$ gleiches Moment:

$$ 9{,}000 \cdot {}_{11}V_{13} = -3{,}000 \cdot {}_{11}V_{11}, \qquad {}_{11}V_{13} = -0{,}0637. $$

Infolge der so ermittelten Verschiebung würden die beseitigten Stäbe $L_{8,13}'$, $L_{10,13}'$ und $L_{12,13}'$ die Längenänderungen erfahren:

$$ \varDelta' L_{8,13} = +0{,}153, \qquad \varDelta' L_{10,13} = -0{,}306, \qquad \varDelta' L_{12,13} = -0{,}764. $$

Aus der Symmetrie des Systemes kann geschlossen werden, daß die Verlängerung $\varDelta L_{4,9} = +1$ die folgenden Verlängerungen hervorbringt:

$$ \varDelta'' L_{8,13} = -0.306, \qquad \varDelta'' L_{10,13} = -0{,}764, \qquad \varDelta'' L_{12,13} = +0{,}153. $$

Entsprechend verursacht die Verlängerung $\varDelta L_{2,7} = +1$ die Längenänderungen:

$$ \varDelta''' L_{8,13} = -0{,}764, \qquad \varDelta''' L_{10,13} = +0{,}153, \qquad \varDelta''' L_{12,13} = -0{,}306. $$

Wir müssen nun den Hilfsstäben solche Längenänderungen erteilen, daß die Gesamtlängenänderungen der beseitigten Stäbe $L_{8,13}'$, $L_{10,13}'$ und $L_{12,13}'$ verschwinden. Aus dieser Bedingung folgen die Gleichungen:

$$ -0{,}764 \cdot \varDelta L_{2,7} - 0{,}306 \cdot \varDelta L_{4,9} + 0.153 \cdot \varDelta L_{6,11} + 0{,}668 = 0 $$
$$ +0{,}153 \cdot \varDelta L_{2,7} - 0{,}764 \cdot \varDelta L_{4,9} - 0{,}306 \cdot \varDelta L_{6,11} - 0{,}334 = 0 $$
$$ -0{,}306 \cdot \varDelta L_{2,7} + 0{,}153 \cdot \varDelta L_{4,9} - 0{,}764 \cdot \varDelta L_{6,11} + 0{,}668 = 0. $$

Die Lösungen sind:

$$ \varDelta L_{2,7} = +1{,}095, \qquad \varDelta L_{4,9} = -0{,}363, \qquad \varDelta L_{6,11} = +0{,}363. $$

Der gesuchte Einflußplan wird nun durch Zusammensetzen der Verschiebungspläne für:

$$ \varDelta L_{7,13} = +1{,}000, \qquad \varDelta L_{2,7} = +1{,}095, \qquad \varDelta L_{4,9} = -0{,}363, \qquad \varDelta L_{6,11} = +0{,}363 $$

erhalten. Man findet so die auf der Tafel 2 angegebenen durch die Abbildungskonstante c dividierten Größen der einzelnen Verschiebungsbildstäbe.

Auch hier soll die Lage des Bildpunktes der Verschiebung V_{13}' durch Kräftepläne geprüft werden. Soll nur im Punkte 13 eine Last P_{13}' wirken, und setzen wir $S_{7,13} = 0$, so bleiben auch die Stäbe $L_{1,7}'$, $L_{7,8}'$ und $L_{7,12}$ spannungslos, denn in ihnen wirkende Kräfte können nicht im Gleichgewicht stehen, da die Stäbe nicht in eine Ebene fallen. Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten 8 folgt, daß $S_{8,13} = 0$ ist, denn dieser Stab liegt nicht in der Ebene der anderen von diesem Knoten ausgehenden Stäbe. Nehmen wir nun die Größe der Bildkraft $S_{8,9}$ beliebig an (Abb. 3, Tafel 2), so können am Knoten 9

[1]) Die aus der Annahme $\varDelta L_{6,11} = +1$ folgenden Verschiebungen werden durch den vorgesetzten Index 11 gekennzeichnet.

die Bildkräfte $S_{3,9}$, $S_{9,10}$ und $S_{9,13}$ bestimmen. Da am Knoten 10 die Stäbe $L_{4,10}'$, $L_{5,10}'$ und $L_{10,11}'$ in einer Ebene liegen, kann die Kraft $S_{10,13}$ ermittelt werden; die Resultierende der Kräfte $S_{9,10}$ und $S_{10,13}$ fällt nämlich in die Schnittlinie der Ebene dieser beiden Stäbe mit der Ebene der Stäbe $L_{4,10}'$, $L_{5,10}'$ und $L_{10,11}'$. Um weiterzukommen müssen wir nun noch die Größe einer weiteren Stabkraft beliebig annehmen. Setzen wir $S_{10,11} = 0$, so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten 11, daß auch die anderen vom Knoten 11 ausgehenden Stäbe spannungslos werden und ebenso der Stab $L_{12,13}'$. Um Gleichgewicht herzustellen, müssen wir nun am Knoten 13 eine Kraft P_{13}' anbringen, die der Resultante der Kräfte $S_{9,13}$ und $S_{10,13}$ entgegengesetzt gleich ist. Ihre Bildkraft geht durch den Schnittpunkt der Bildstäbe $L_{9,13}$ und $L_{10,13}$, auf ihr muß der Bildpunkt der Verschiebung V_{13}' liegen. Um einen zweiten Ort für diesen Bildpunkt zu finden, geben wir anstelle der obigen Annahme der Bildkraft $S_{10,11}$ eine beliebige Größe und erhalten so einen Kräfteplan, dessen Kräfte von denen des vorigen durch einen Strich (') unterschieden sind. Zur Herstellung des Gleichgewichtes muß am Knoten 13 eine Kraft P_{13}'' angebracht werden, die der Resultante der Stabkräfte $S_{9,13}$, $S_{10,13}$, $S_{11,13}$ und $S_{12,13}$ entgegengesetzt gleich ist. Um diese Resultante zu finden setzen wir zunächst die Kräfte $S_{9,13}'$ und $S_{10,13}'$ zur Kraft R' zusammen, die mit der ersten Gleichgewicht herstellenden Kraft P_{13} die Wirkungslinie gemeinsam hat. Sodann bilden wir die Resultante R der Bildkräfte $S_{11,13}'$ und $S_{12,13}'$. Sie geht durch den Schnittpunkt der Bildstäbe $L_{11,13}$ und $L_{12,13}$ und schneidet R' im Bildpunkt der Verschiebung V_{13}', dessen Lage somit geprüft ist.

3. Einflußplan für den Gratstab einer Scheibenkuppel.[1]) Es soll der Einflußplan für die Stabkraft $S_{1,9}$ der in Abb. 1, Tafel 3 dargestellten Scheibenkuppel bestimmt werden. Wir bilden zunächst die Stäbe der Kuppel nach Art der Abbildung B ab, indem wir die Abbildungskonstante gleich der doppelten Länge des Grundrisses von $L_{1,9}'$ machen, also $c = 5{,}656$ m.

Wir erteilen alsdann dem Stabe $L_{1,9}'$ die Längenänderung $\Delta L_{1,9} = +1$ und zeichnen den zugehörigen Verschiebungsplan. Wollten wir dazu die seither verwendeten Methoden benutzen, so müßten wir, wie im vorigen Beispiel, eine oder mehrere Stabvertauschungen vornehmen. Es soll hier jedoch gezeigt werden, wie man in vielen Fällen Stabvertauschungen umgehen kann, indem man die Lage der einzelnen Verschiebungsbildpunkte durch statische Ueberlegungen bestimmt.

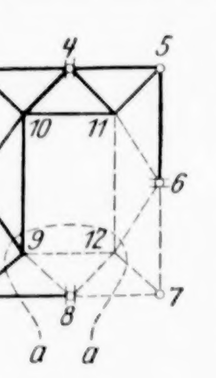


Abb. 7.

Wir ermitteln zunächst die Lage des Bildpunktes der Verschiebung V_{10}'. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daß nur im Punkte 10 eine Last wirke, deren Richtung wir so bestimmen wollen, daß der Stab $L_{1,9}'$ spannungslos bleibt. Schneidet man durch den Schnitt $a - a$ (Abb. 7) das Dreieck 8, 9, 12 heraus und faßt die an seinen Ecken wirkenden Stabkräfte zu den Resultanten R_8, R_9 und R_{12} zusammen, so müssen diese Resultanten im Gleichgewicht stehen, sie müssen daher in der Dreiecksebene wirken und sich in einem Punkte schneiden. Nun liegen aber die Stäbe $L_{1,9}'$, $L_{2,9}'$ und $L_{9,10}'$ in einer Ebene, die Resultante der entsprechenden Stabkräfte fällt also in die Schnittlinie $L_{1,9}'$ dieser Ebene mit der Ebene des Dreiecks 8, 9, 12.

Ebenso fällt die Resultante der im Punkte 8 angreifenden Kräfte in die Gerade $l_{1,8}'$ und die Resultante der am Punkte 12 angreifenden Kräfte in die Gerade $l_{7,12}'$. Diese Resultanten R_8, R_9 und R_{12} schneiden sich nicht in einem Punkte, können also nur dann im Gleichgewicht stehen, wenn jede für sich verschwindet. Auf das Dreieck 8, 9, 12 wirken somit keine Kräfte, die Stäbe $L_{8,9}'$, $L_{8,12}'$ und $L_{9,12}'$ sind spannungslos. Das Gleiche gilt für die Stäbe $L_{6,11}'$, $L_{6,12}'$ und $L_{11,12}'$, wie eine entsprechende Betrachtung am Dreieck 6, 11, 12 zeigt. Alsdann folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten 12, an dem ja keine äußere Last angreift, daß auch der Stab $L_{7,12}'$ spannunglos ist. Alle diese Stäbe sind in Abb. 7 punktiert gezeichnet.

Nun wollten wir ja die Richtung der Last P_{10}' so bestimmen, daß der Stab $L_{1,9}'$ keine Spannung enthält; dann sind aber auch die Stäbe $L_{2,9}'$ und $L_{9,10}'$ spannungslos.

[1]) Vergl. Schlink, Statik der Raumfachwerke, Kapitel 7 und 8.

Am Knoten 2 müssen die Stabkräfte $S_{1,2}$, $S_{2,3}$, $S_{2,10}$, und die Lagerreaktion A_2 im Gleichgewicht stehen; die Wirkungslinien dieser Kräfte liegen aber bis auf die von $S_{2,10}$ in einer Ebene, es muß also $S_{2,10}$ gleich null sein.

Am Knoten 10 muß nun Gleichgewicht bestehen zwischen der dort angreifenden Last $\overline{P}_{10}'$ und den Stabkräften $S_{3,10}$, $S_{4,10}$ und $S_{10,11}$. Dies ist nur möglich, wenn die Last P_{10}' in die Ebene der entsprechenden Stäbe fällt. Die Bildkraft P_{10} muß somit durch den Bildpunkt dieser Ebene, d. i. den Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L}_{3,10}$ und $\overline{L}_{10,11}$ gehen, der Bildpunkt der Verschiebung $\overline{V}_{10}'$ fällt daher mit diesem Schnittpunkt zusammen (Abb. 2, Tafel 3).

Durch eine entsprechende Ueberlegung läßt sich zeigen, daß der Bildpunkt von $\overline{V}_{12}'$ im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L}_{7,12}$ und $\overline{L}_{11,12}$ liegt.

Um die Lage des Bildpunktes der Verschiebung $\overline{V}_9'$ zu bestimmen, nehmen wir an, es wirke nur im Knoten 9 eine Last $\overline{P}_9'$, deren Richtung wir wiederum so bestimmen wollen, daß der Stab $\overline{L}_{1,9}'$ spannungslos bleibt. Ebenso sind alle anderen in Abb. 8 punktiert gezeichneten Stäbe spannungslos.

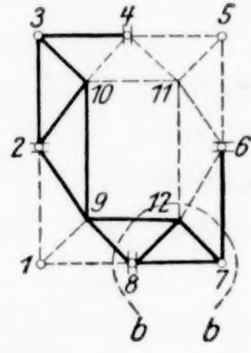


Abb. 8.

Schneiden wir nun durch den Schnitt $b - b$ das Dreieck 7, 8, 12 heraus und fassen die an seinen Ecken wirkenden Kräfte zu den Resultanten R_7, R_8 und R_{12} zusammen, so müssen diese Kräfte im Gleichgewicht stehen, also ihre Wirkungslinien in eine Ebene fallen und sich in einem Punkt schneiden. Im Punkte 8 greifen die Kraft $S_{8,9}$ und die Lagerreaktion A_8 an. Soll die Resultante R_8 dieser beiden Kräfte in die Ebene des Dreiecks 7, 8, 12 fallen, so muß A_8 die Gerade $l_{7,8}'$ zur Wirkungslinie haben. Fassen wir nun A_8 und R_7 zu einer im Punkte 7 angreifenden Kraft R_7' zusammen, so muß diese im Gleichgewicht stehen mit den Kräften $S_{8,9}$ und $S_{9,12}$; die Resultierende dieser beiden Kräfte muß also ebenfalls durch den Punkt 7 gehen, hat also die Diagonale $l_{7,9}'$ zur Wirkungslinie. In entsprechender Weise ergibt sich, daß die Resultante der Kräfte $S_{2,9}$ und $S_{9,10}$ die Diagonale $l_{3,9}'$ zur Wirkunglinie hat.

Soll die am Punkte 9 angreifende Last $\overline{P}_9'$ mit diesen beiden Resultanten im Gleichgewicht stehen, so muß sie mit ihnen in einer Ebene liegen, ihr Bildstab geht somit durch den Bildpunkt dieser Ebene, d. i. durch den Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{l}_{3,9}$ und $\overline{l}_{7,9}$. Mit diesem Schnittpunkt fällt der Bildpunkt der Verschiebung $\overline{V}_9'$ zusammen.

Eine beliebige im Punkte 1 angreifende Last $\overline{P}_9'$ läßt den Stab $L_{1,9}'$ spannungslos, die Längenänderung $\Delta L_{1,9} = +1$ bringt also keine Verschiebung des Punktes 1 hervor.

Tafel 3. Abb. 1. Abb. 2.

$V_9 = 0{,}1335$
$V_{10} = 0{,}0486$
$V_{12} = 0{,}0602$
$V_2' = V_8' = 0{,}182$

Es ist also:

$$\overline{V_1}' = 0$$

und ebenso:

$$\overline{V_3}' = \overline{V_4}' = \overline{V_5}' = \overline{V_6}' = \overline{V_7}' = \overline{V_{11}}' = 0.$$

Nunmehr kann die durch die Abbildungskonstante c dividierte Größe des Bildstabes von $\overline{V_9}'$ aus der Grundgleichung berechnet werden:

$$\overline{L_{1,9}}' \cdot \overline{V_9}' = \overline{L_{1,9}} \cdot \Delta L_{1,9} = 4{,}12\,, \qquad 2{,}828 \cdot 10{,}9 \cdot V_9 = 4{,}12\,, \qquad V_9 = 0{,}1335.$$

Da die Punkte 9 und 10 durch den starren Stab $\overline{L_{9,10}}'$ verbunden sind, haben die Bildstäbe ihrer Verschiebungen in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{9,10}}$ gleiches Moment:

$$8{,}50 \cdot V_{10} = 3{,}09 \cdot V_9\,, \qquad V_{10} = 0{,}0486$$

und ebenso haben die Bildstäbe der Verschiebungen $\overline{V_9}'$ und $\overline{V_{12}}'$ in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{9,12}}$ gleiches Moment:

$$8{,}50 \cdot V_{12} = 3{,}82 \cdot V_9\,, \qquad V_{12} = 0{,}0602.$$

Die Verschiebungen der Punkte 2 und 8 sind parallel zur Bildebene, werden also dargestellt durch ein Stäbepaar und dieses wiederum durch einen zu seiner Ebene senkrechten Vektor, der mit der durch das Stäbepaar dargestellten Verschiebung identisch ist (siehe I, 1). Das innere Produkt aus dieser Verschiebung und einem Vektor $\overline{L}'$ ist also gleich dem inneren Produkt aus der Verschiebung und dem Bildstab $\overline{L}$.

Da die Punkte 2 und 9 durch den starren Stab $\overline{L_{2,9}}'$ verbunden sind, gilt die Grundgleichung:

$$\overline{L_{2,9}} \cdot \overline{V_2}' = \overline{L_{2,9}}' \cdot \overline{V_9}'$$

oder:

$$V_2' \cdot \cos\alpha = 4{,}28 \cdot \frac{1}{c} \cdot V_9\,, \qquad V_2' = +\,0{,}182$$

und entsprechend:

$$\overline{L_{8,9}}' \cdot \overline{V_8}' = \overline{L_{8,9}} \cdot \overline{V_9}'\,, \qquad V_8' \cdot \cos\beta = 5{,}45 \cdot \frac{1}{c} \cdot V_9\,, \qquad V_8' = +\,0{,}182.$$

Damit ist der gesuchte Einflußplan bestimmt. Eine einfache Kontrolle für die Richtigkeit erhält man aus den noch nicht verwendeten Bedingungen:

$$\overline{L_{2,10}}' \cdot \overline{V_2}' = \overline{L_{2,10}} \cdot \overline{V_{10}}'$$

und:

$$\overline{L_{8,12}}' \cdot \overline{V_8}' = \overline{L_{8,12}}' \cdot \overline{V_{12}}'.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt mit einer Abweichung von etwa 2 vH (Zeichenungenauigkeit).

4. Einflußplan für eine Stabkraft eines einfach unbestimmten Fachwerkes. Die Behandlung statisch unbestimmter Fachwerke soll an einem besonders einfachen Beispiel gezeigt werden (Abb. 9). Der Punkt 5 ist durch vier Stäbe an vier feste Punkte 1, 2, 3 und 4 angeschlossen. Als Unbekannte wählen wir die Kraft im Stabe $\overline{L_{4,5}}'$. Sind die Querschnitte aller Stäbe einander gleich, so können wir mit den $E \cdot F$-fachen Verschiebungen und dementsprechend auch mit den $E \cdot F$-fachen elastischen Gewichten rechnen. Die Abbildungskonstante wählen wir zu $c = 1{,}5$ m und erhalten dann als Abbildung B des statisch bestimmten Grundsystemes ($X = 0$) die Abb. 10. Die Verlängerung $\Delta L_{1,5} = +\,1$ des Stabes $\overline{L_{1,5}}'$ verursacht eine Verschiebung ${}_{1,5}\overline{V_5}'$ des Punktes 5, deren durch die Abbildungskonstante c dividierter Bildstab in bezug auf den Bildstab $\overline{L_{1,5}}$ das Moment $L_{1,5} \cdot \Delta L_{1,5}$ hat. Der Bildpunkt dieser Verschiebung liegt im Schnittpunkt der Bildstäbe $\overline{L_{2,5}}$ und $\overline{L_{3,5}}$. Man findet:

$${}_{1,5}V_5 = 0{,}278$$

und in entsprechender Weise:

$${}_{2,5}V_5 = 0{,}278\,, \qquad {}_{3,5}V_5 = 0{,}278.$$

Aus diesen Werten können die elastischen Gewichte zweiter Ordnung der einzelnen Stäbe in bezug auf den Knoten 5 berechnet werden; es ergibt sich:

$$E \cdot F \cdot {}_{1,5}G_{5,5} = E \cdot F \cdot {}_{2,5}G_{5,5} = E \cdot F \cdot {}_{3,5}G_{5,5} = 0{,}578.$$

Wir bestimmen die Resultierende $\overline{R}_{5,5}$ dieser Gewichte, sie hat die Größe:

$$E \cdot F \cdot \overline{R}_{5,5} = 3 \cdot 0{,}578 = 1{,}734$$

und greift im Schwerpunkt des von den Bildstäben $\overline{L}_{1,5}$, $\overline{L}_{2,5}$, $\overline{L}_{3,5}$ gebildeten Dreiecks an.

Die durch eine beliebige Last $\overline{P}_5'$ hervorgerufene Hebung h_5 des Punktes 5 wird dann als statisches Moment der Bildkraft $\overline{P}_5$ in bezug auf das Hebungsgewicht $\overline{R}_{5,5}$ des Punktes 5 berechnet. Der Kraft $X = -1$ entspricht das Stäbepaar $M_z = c$ der Bildebene, das Moment dieses Stäbepaares in bezug auf das Hebungsgewicht $\overline{R}_{5,5}$ ist gleich dem c-fachen Gewicht, wir bezeichnen diese Hebung infolge $X = -1$ mit h_5'.

Die gesamte Hebung des Punktes 5 ist somit:

$$h_5 - X \cdot h_5',$$

sie muß gleich der Verlängerung h_5'' des Stabes $L_{4,5}'$ sein:

$$h_5 - X \cdot h_5' = h_5'' = X \cdot \frac{L_{4,5}}{E \cdot F}$$

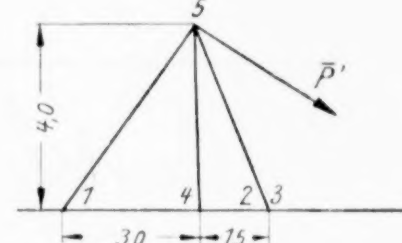
worin:

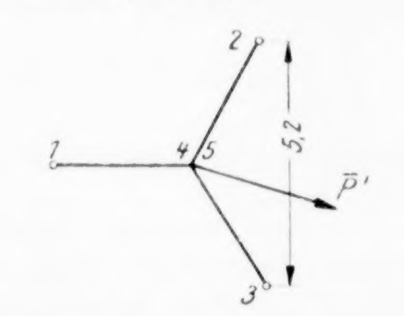
$$h_5' = c \cdot \overline{R}_{5,5} \quad \text{ist.}$$

Aus der obigen Gleichung folgt:

$$X = \frac{E \cdot F \cdot h_5}{E \cdot F \cdot h_5' + L_{4,5}}.$$

Man erhält also die durch die Kraft $\overline{P}_5'$ im Stabe $\overline{L}_{4,5}'$ hervorgebrachte Stabkraft, indem man das statische Moment der Bildkraft $\overline{P}_5$ in bezug auf das Hebungsgewicht $E \cdot F \cdot \overline{R}_{5,5}$ durch die Größe $(E \cdot F \cdot h_5' + L_{4,5})$ dividiert. Man kann das Hebungsgewicht und diese Größe zu dem Einflußgewicht $E_5 = + 0{,}262$ zusammenfassen und braucht dann nur das Moment der Bildkraft $\overline{P}_5$ in bezug auf dieses Einflußgewicht zu bilden. Man erhält so den Einflußplan für die statisch unbestimmte Größe X.





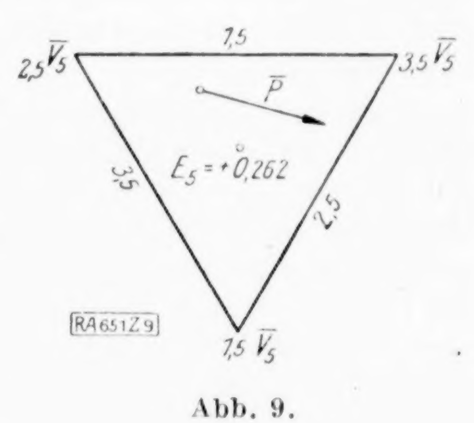


Abb. 9.

Schlußbemerkung. Durch die vorstehenden Beispiele glaubt der Verfasser den Beweis dafür erbracht zu haben, daß die neue Methode zu einer im Verhältnis zur Schwierigkeit des Problems einfachen Bestimmung der Einflußpläne für Stabkräfte und Hebungen führt. Das hier verwendete Abbildungsverfahren scheint zur konstruktiven Behandlung von Problemen aus der Kinematik räumlicher Gebilde geeigneter als die übliche Abbildung in Grund- und Aufriß. Das Eingehen auf diese Möglichkeiten, das den Rahmen der vorliegenden Arbeit wesentlich überschreiten würde, soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. 651

Über rechteckige Platten, die längs zweier gegenüberliegenden Seiten auf biegsamen Trägern ruhen.

Von **EMIL MÜLLER** in Wien.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, welchen Einfluß die Lagerung einer rechteckigen Platte auf elastisch biegsamen Trägern an zwei gegenüberliegenden Seiten auf die Größe der Durchbiegungen, Biegungsmomente, Drillungsmomente und Auflagerdrücke ausübt. Es zeigt sich, daß man zu den betreffenden Ausdrücken gelangen kann, indem man zu der Funktion, die die Biegungsfläche für den Fall fest unterstützter Ränder darstellt, gewisse in Fouriersche Reihen entwickelte Funktionen hinzufügt, deren Konstante so bestimmt werden können, daß den Randbedingungen der Aufgabe Genüge getan wird. Für den Sonderfall über die ganze Platte gleichmäßig verteilter Belastung und unter der Annahme, daß die Poissonsche Zahl $= \infty$ gesetzt werden darf, werden die Ergebnisse ziffernmäßig ausgewertet. Für die Durchbiegungen und Biegungsmomente in Plattenmitte werden Tabellen aufgestellt, aus denen diese Werte für verschiedene Seitenverhältnisse und verschiedene Verhältnisse der Bie-

gungssteifigkeiten von Träger und Platte unmittelbar entnommen werden können. Damit ist die Möglichkeit gegeben, einem für die Beanspruchung der Platte bedeutungsvollen Umstand leicht Rechnung tragen zu können.

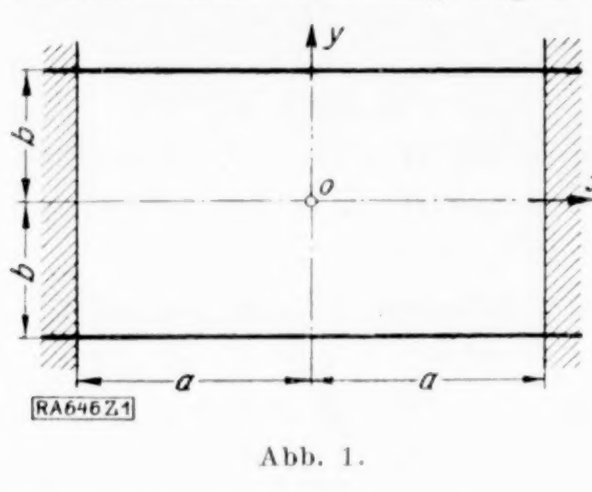


Abb. 1.

1. Der Ansatz. Die Biegungsfläche einer rechteckigen Platte mit den Seiten $x = \pm a$, $y = \pm b$ (Abb. 1) sei für den Fall unnachgiebiger Stützung und freier Auflagerung an allen vier Seiten bekannt. Für eine bestimmte Belastung sei sie durch die Funktion $w_0(x, y)$ gegeben. Dann läßt sich für andere Randbedingungen eine Lösung finden, indem man der Funktion w_0 zwei weitere Funktionen

$$w_1(x, y) = \Sigma Y_m \cos \frac{m \pi x}{2a} \quad (m = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$w_2(x, y) = \Sigma X_n \cos \frac{n \pi y}{2b} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

überlagert, worin bedeuten

$$Y_m = A_m \operatorname{Cof} \frac{m \pi y}{2a} + B_m y \operatorname{Sin} \frac{m \pi y}{2a} + C_m \operatorname{Sin} \frac{m \pi y}{2a} + D_m y \operatorname{Cof} \frac{m \pi y}{2a}$$

$$X_n = A_n \operatorname{Cof} \frac{n \pi x}{2b} + B_n x \operatorname{Sin} \frac{n \pi x}{2b} + C_n \operatorname{Sin} \frac{n \pi x}{2b} + D_n x \operatorname{Cof} \frac{n \pi x}{2b}.$$

Auf diesem Wege hat Nádai in einer klassischen Arbeit[1]) eine größere Zahl verschiedenartiger und verschieden gelagerter Platten behandelt und die Rechnung ziffernmäßig so weit durchgeführt, daß die Ergebnisse unmittelbar verwertet werden können. Auf dieselbe Weise hat Marcus die nur auf zwei gegenüberliegenden Rändern aufruhende Platte sowie den Einfluß einer als gegeben angenommenen Senkung eines der Randstützpunkte[2]) berechnet. Im folgenden wird nun dasselbe Verfahren auf die Lösung der in der Einleitung gestellten Aufgabe angewendet. Die Ränder $x = \pm a$ seien fest, die Ränder $y = \pm b$ durch elastisch biegsame Träger unterstützt. Dabei soll die Auflagerung an allen vier Rändern einspannungsfrei sein. Der Elastizitätsmodul des Plattenmaterials sei mit E_1, jener des Trägermaterials mit E_2 und das Trägheitsmoment eines der Träger mit J bezeichnet.

Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung einer Platte, die symmetrisch zu den Koordinatenachsen (Abb. 1) belastet ist, so genügt es, eine Funktion

$$w_1 = \Sigma \left(A_m \operatorname{Cof} \frac{m \pi y}{2a} + B_m y \operatorname{Sin} \frac{m \pi y}{2a} \right) \cos \frac{m \pi x}{2a} \quad (m = 1, 2, 3 \ldots) \quad . \quad . \quad (1)$$

zu der als bekannt vorausgesetzten Funktion w_0 hinzuzufügen, um die Randbedingungen durch entsprechende Wahl der Konstanten A_m und B_m befriedigen zu können.

Die Randbedingungen fordern zunächst, daß die Senkungen und Biegungsmomente an den Seiten $x = \pm a$ verschwinden; diese Forderung ist durch den Ansatz (1) von Haus aus erfüllt. Dagegen muß die Erfüllung der Randbedingungen an den Seiten $y = \pm b$ erst durch entsprechende Bestimmung der Konstanten herbeigeführt werden. Die Bedingungen für diesen Rand bestehen einerseits im Verschwinden der Biegungsmomente senkrecht zum Rand, d. h. es muß sein, wenn $w_0 + w_1 = w$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ oder, da schon } \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

(μ = reziproker Wert der Poissonschen Konstante),

anderseits darin, daß der Auflagerdruck je Längeneinheit, da er gleichzeitig die Belastung des Randträgers bildet, gleich $E_2 J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ sein muß. Bezeichnen wir die Funktion für die Auflagerdrücke mit v_b, so muß also die Gleichung bestehen

$$v_b = E_2 J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

[1]) Nádai, Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, Zeitschr. d. Vereins Deutsch. Ing., Jahrg. 1914, S. 487 und 540.

[2]) Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, S. 189 bzw. 197.

Da nun
$$v_b = \frac{E_1 h^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]^{1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$
so liefert die Bedingung (3) die Gleichung
$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = b k (1-\mu^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$
worin $k = \dfrac{E_2 J}{\dfrac{E_1 b h^3}{12}}$ = Verhältnis der Biegungssteifigkeiten von Randträger und Platte und h = Plattendicke.

Die Gleichung (2) führt zu der Beziehung
$$B_m = -f_m \frac{A_m}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$
worin, wenn $\frac{b}{a} = \lambda$ gesetzt wird,
$$f_m = \frac{1}{\dfrac{4}{m\pi\lambda(1-\mu)} + \mathfrak{Tg}\,\dfrac{m\pi\lambda}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$
bedeutet.

Zur Erleichterung von Ziffernrechnungen sei die folgende Zahlentafel angegeben, in der $\mu = 0$ vorausgesetzt wurde:

Zahlentafel 1. Werte f.

m \ λ	0,25	0,33	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
1	0,1829	0,2326	0,2674	0,3123	0,3498	0,3817	0,4096	0,4342	0,4565	0,4960	0,5305	0,5609	0,5881	0,6124
3	0,3961	0,4565	0,4960	0,5460	0,5881	0,6236	0,6539	0,6797	0,7022	0,7388	0,7674	0 7904	0,8092	0,8249

Eine Veranschaulichung dieses Zusammenhanges gibt Abb. 2.

Es werde bemerkt, daß für größere Werte des Argumentes
$$\omega_m = \frac{m\pi\lambda}{2}$$
mit guter Annäherung
$$f_m = \frac{\omega_m}{2+\omega_m} \quad . \; . \quad (8)$$
gesetzt werden kann. Für $\omega_m = \pi$, d. i. für $m\lambda = 2$, erhält man nach dieser Formel z. B. $f_m = 0{,}611$ anstatt, wie die Zahlentafel zeigt ($m = 1$, $\lambda = 2{,}0$), $f_m = 0{,}612$. Der Unterschied beträgt also nur mehr eine Einheit der dritten Stelle und nimmt mit wachsendem ω_m rasch weiter ab.

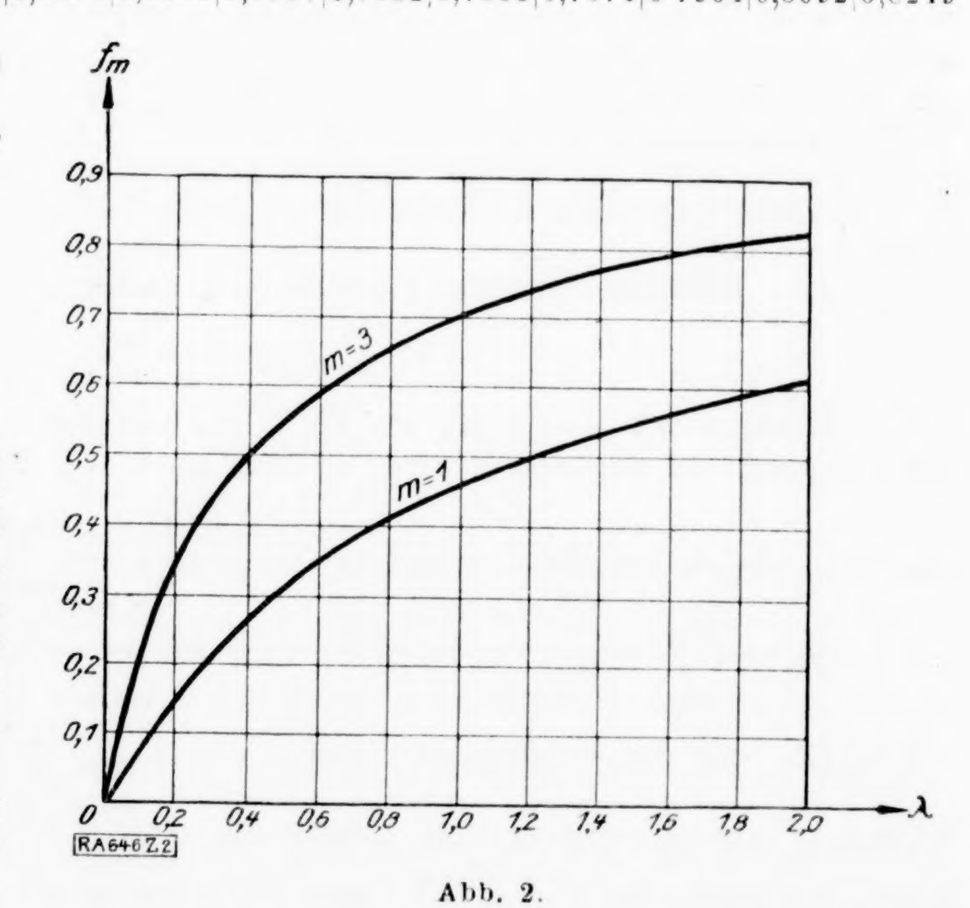


Abb. 2.

Um die Gleichung (5) weiter auswerten zu können, denken wir uns die Funktion w_0 in eine Fouriersche Reihe entwickelt, der wir hier wegen der vorausgesetzten achsensymmetrischen Belastung die Form geben können
$$w_0 = \Sigma c_{mn} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{n\pi y}{2b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

[1]) S. in der genannten Abhandlung von Nádai den Ausdruck für p_y' in Gl. (8) auf S. 491. Wenn der Ausdruck (4) für $y = +b$ positiv ist, so bedeutet dies, daß von der Platte auf den Träger Drücke übertragen werden; in demselben Falle wird auch der Ausdruck (3) positiv.

worin die Summe über alle ganzzahligen m und n erstreckt zu denken ist. Auf Grund von (9) und (1) und unter Berücksichtigung von (6) läßt sich nun schreiben

$$w = w_0 + w_1 = \Sigma c_{mn} \cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b} + \Sigma A_m\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{m\pi y}{2a} - f_m\frac{y}{b}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\pi y}{2a}\right)\cos\frac{m\pi x}{2a}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die für $y = \pm b$ giltige Gleichung (5) ein, so erhält man eine neue Gleichung, die, wie man durch Vergleich der Koeffizienten zu gleichen m gehöriger $\cos\frac{m\pi x}{2a}$ findet, nur dann für alle x befriedigt wird, wenn

$$A_m = \frac{\pi^3}{8}\,\frac{\Sigma_m' + (2-\mu)\,m^2\lambda^2\,\Sigma_m'' - (1-\mu^2)\,\frac{m^4\lambda^4\pi}{2}\,k\,\Sigma_m'''}{\Omega_m' - (2-\mu)\,\Omega_m'' + (1-\mu^2)\,k\,\Omega_m'''} \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Hierin bedeuten:

$$\Sigma_m' = \sum_{n=1,3,5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n^3 c_{mn}, \quad \Sigma_m'' = \sum_{n=1,3,5\ldots}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n\,c_{mn} \quad \Sigma_m''' = \sum_{n=2,4,6\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}}\,c_{mn} \quad (11).$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_m' &= f_m\,\omega_m^3\,\mathfrak{Cof}\,\omega_m - \omega_m^2(\omega_m - 3f_m)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_m\\ \Omega_m'' &= f_m\,\omega_m^3\,\mathfrak{Cof}\,\omega_m - \omega_m^2(\omega_m - f_m)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_m\\ \Omega_m''' &= \omega_m^4(\mathfrak{Cof}\,\omega_m - f_m\,\mathfrak{Sin}\,\omega_m)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß sich die Summen in den Ausdrücken (11) nur über die Werte n erstrecken; der in den Summen vorkommende Wert m ist für alle Glieder einer Summe derselbe. Zu jedem m gehört je ein bestimmter Wert $\Sigma_m', \Sigma_m'' \ldots \Omega_m'''$.

Für den Sonderfall gleichmäßig verteilter Belastung auf der ganzen Platte werden die $c_{mn} = 0$, wenn einer der beiden Zeiger gerade, dagegen

$$c_{mn} = \frac{3072\,(1-\mu^2)\,b^4 p}{\pi^6 E_1 h^3}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{m\,n\,(m^2\lambda^2+n^2)^2} \quad \ldots\ldots \quad (13)^{1)},$$

wenn beide Zeiger ungerade. Infolgedessen werden in diesem Fall, wie aus (10) hervorgeht, alle A mit geraden Zeigern null. Von den A mit ungeraden Zeigern aber überragt A_1, wie Ziffernrechnungen zeigen, die übrigen A so bedeutend, daß es für die Berechnung der Durchbiegungen genügt, von der Summe des Ausdruckes (1) lediglich das erste Glied beizubehalten; für die Berechnung der Biegungsmomente ist auch noch das Glied mit A_3, in besonders ungünstigen Fällen (kleine λ) höchstens noch das Glied mit A_5 in Rechnung zu stellen.

Die Ausdrücke für die Festwerte A_m haben die Form

$$A_m = \frac{\alpha_m}{\beta_m + \gamma_m k}.$$

Nehmen wir $\mu = 0$ an, ein Wert, der von mehreren Autoren[2]) für Eisenbetonplatten als entsprechend angesehen wird, so sind nach (10) bzw. (11), (12) und (13)

$$\alpha_m = \frac{\pi^3}{8}(\Sigma_m' + 2m^2\lambda^2\Sigma_m'') = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\,\frac{384}{\pi^3}\left(\frac{b}{h}\right)^3\frac{pb}{E_1}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{n^2+2m^2\lambda^2}{m(n^2+m^2\lambda^2)^2} = 12{,}3846\left(\frac{b}{h}\right)^3\frac{pb}{E_1}\,\alpha_m'$$

$$\beta_m = \Omega_m' - 2\,\Omega_m'' = \omega_m^2[(\omega_m + f_m)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_m - f_m\,\omega_m\,\mathfrak{Cof}\,\omega_m], \qquad \gamma_m = \Omega_m'''.$$

Die mit α_m' bezeichnete Summe $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum\limits_{n=1,3,5\ldots}\frac{n^2+2m^2\lambda^2}{m(n^2+m^2\lambda^2)^2}$ wurde in der Weise bestimmt, daß die Glieder mit $n = 1$ bis 9 einzeln berechnet und der dann noch verbleibende Rest $\sum\limits_{n=11,13\ldots\infty}\frac{n^2+2m^2\lambda^2}{m(n^2+m^2\lambda^2)^2}$ durch das Integral

$$\frac{1}{2m}\int_{10}^{\infty}\frac{x^2+2m^2\lambda^2}{(x^2+m^2\lambda^2)^2}\,dx = \frac{1}{4m}\left[\frac{3}{m\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{10}{m\lambda}\right) - \frac{10}{100+m^2\lambda^2}\right]$$

[1]) Föppl, Drang und Zwang, 1. Bd., S. 168, Gl (71).

[2]) S. z. B. Lewe, Die strenge Lösung des Pilzdeckenproblems, oder **Marcus**, Die Theorie elastischer Gewebe usw., S. 36.

ersetzt wurde. Die Verwandlung der Summe in das Integral stellt die Umkehrung des Vorganges dar, nach dem man ein bestimmtes Integral in eine Summe aufzulösen pflegt. Das Restglied ist von λ ziemlich unabhängig und kann mit genügender Genauigkeit durch den Ausdruck $\frac{0{,}05}{m}$ ersetzt werden. — Für die Berechnung der α_m' für verschiedene m ist es nützlich, sich folgender Beziehung bewußt zu sein:

Aus der Bedeutung von α_m' geht unmittelbar hervor, daß

$$\left|\alpha_m'(\lambda)\right| = \frac{r}{m}\left|\alpha_r'\left(\frac{m\lambda}{r}\right)\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Kennt man also α_r' etwa für alle λ-Werte bis $\lambda = \varrho$, so kennt man danach auch die Werte von α_m' bis $\lambda = \frac{\varrho r}{m}$; denn setzt man in (14) $\lambda = \frac{\varrho r}{m}$, so bekommt man

$$\left|\alpha_m'\left(\frac{\varrho r}{m}\right)\right| = \frac{r}{m}\left|\alpha_r'(\varrho)\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Würde man die Werte einer Funktion, etwa von α_r', für alle Werte des Argumentes λ (bis $\lambda = \infty$) kennen, so ließen sich alle Werte aller Funktionen α_m' finden. Nach den unten folgenden Zahlentafeln kennt man z. B. die Werte der Funktion α_3' bis $\lambda = 2$; es ist also $r = 3$, $\varrho = 2$. Sonach findet man aus (14) mit $m = 5$ leicht die Werte von α_5' bis $\frac{\varrho r}{m} = 1{,}2$.

Der Nenner von A_m kann für größere ω_m näherungsweise durch den Ausdruck

$$\frac{3 + 2\,k\,\omega_m}{2 + \omega_m}\,\omega_m^{\,3}\,\frac{1}{2}\,e^{\omega_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ersetzt werden, indem dann für f_m die Form (8) eingeführt und $\mathfrak{Cof}\,\omega_m = \mathfrak{Sin}\,\omega_m = {}^1/_2\,e^{\omega_m}$ geschrieben werden kann. Man ersieht daraus, daß A_m mit wachsendem ω_m äußerst rasch abnehmen muß.

Zur raschen Ermittlung von A_m mögen die folgenden Zahlentafeln sowie die Schaubilder der Abb. 3 und 4 dienen.

Zahlentafel 2.

	λ	0,25	0,33	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$m = 1$	α_1'	1,2304	1,2237	1,2148	1,1937	1,1635	1,1254	1,0810
	β_1	0,0238	0,0755	0,1573	0,3878	0,8164	1,544	2,705
	γ_1	0,0239	0,0761	0,1597	0,4008	0,8658	1,693	3,087
$m = 3$	$-\alpha_3'$	0,3679	0,3275	0,2944	0,2500	0,2135	0,1854	0,1631
	β_3	2,064	7,072	16,02	46,22	117,21	274	603
	γ_3	2,304	8,880	22,39	76,07	225,45	607	1520

Noch: Zahlentafel 2.

	λ	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$m = 1$	α_1'	1,0328	0,9826	0,8833	0,7916	0,7110	0,6415	0.5824
	β_1	4,472	7,072	16,025	33,03	63,75	117,22	210,2
	γ_1	5,342	8,880	22,39	51,50	110,66	225,47	440,2
$m = 3$	$-\alpha_3'$	0,1453	0,1309	0,1091	0,0936	0,0818	0,0728	0,0655
	β_3	1273	2602	10 120	36 740	126 960	397 000	1 363 000
	γ_3	3604	8178	48 900	161 600	638 200	2 250 000	8 560 000

Um A_1 bzw. $-A_3$ selbst zu erhalten, sind die Werte der Zahlentafel 3 noch mit $12{,}3846\left(\frac{b}{h}\right)^3\frac{p\,b}{E_1}$ zu multiplizieren.

2. Die Durchbiegungen, Spannungen und Biegungsmomente. Wie sich die Formänderungs- und Spannungsgrößen durch die Lagerung auf nachgiebigen Randträgern gegenüber dem Grundfalle (unnachgiebige Stützung und freie Auflagerung längs

Zahlentafel 3.

Werte $A_1' = \frac{\alpha_1'}{\beta_1 + \gamma_1 k}$ (obere Ziffer) und $-A_3' = -\frac{\alpha_3'}{\beta_3 + \gamma_3 k}$ (untere Ziffer) für runde k-Werte.

k \ λ	0,25	0,33	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	51,68 0,178	16,20 0,0463	7,723 0,0184	3,078 0,00541	1,425 0,00182	0,7289 0,00068	0,3996 0,00027
0,5	34,41 0,114	10,78 0,0285	5,121 0,0108	2,029 0,00297	0,931 0,00093	0,4707 0 00032	0,2544 0,00012
1,0	25,80 0,0843	8,070 0,0205	3,832 0,00766	1,514 0,00204	0,692 0,00062	0,3477 0,00021	0,1866 0,00008
1,5	20,63 0,0667	6,450 0,0161	3,061 0,00593	1,207 0,00156	0,550 0,00047	0,2756 0,00016	0,1473 0,00006
2,0	17,19 0,0551	5,373 0,0132	2,548 0,00484	1,004 0,00126	0,457 0,00038	0,2283 0,00012	0,1217 0,00004
2,5	14,73 0,0470	4,603 0,0112	2,183 0,00409	0,859 0,00106	0,390 0,00031	0,1948 0,00010	0,1037 0,00004
3,0	12,89 0,0410	4,027 0,0097	1,909 0,00354	0,751 0,00091	0,341 0,00027	0,1699 0,00009	0,0903 0,00003

Noch: Zahlentafel 3.

Werte $A_1' = \frac{\alpha_1'}{\beta_1 + \gamma_1 k}$ (obere Ziffer) und $-A_3' = -\frac{\alpha_3'}{\beta_3 + \gamma_3 k}$ (untere Ziffer) für runde k-Werte.

k \ λ	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2 0
0	0,2309 0,00011	0,1389 0,00005	0,0551 0,00001	0,0240 —	0,0112 —	0,0055 —	0 0028 —
0.5	0,1446 0,00005	0,0854 0,00002	0,0324 —	0,0135 —	0,0060 —	0,0028 —	0,0014 —
1,0	0,1052 0,00003	0,0616 0,00001	0,0230 —	0,0094 —	0,0041 —	0,0019 —	0,0009 —
1,5	0,0827 0,00002	0,0482 0,00001	0,0178 —	0,0072 —	0,0031 —	0,0014 —	0,0007 —
2,0	0,0681 0,00002	0,0396 0,00001	0,0145 —	0,0058 —	0,0025 —	0,0011 —	0,0005 —
2,5	0,0579 0,00001	0,0336 0,00001	0,0123 —	0,0049 —	0,0021 —	0,0009 —	0,0004 —
3,0	0,0504 0,00001	0,0292 —	0,106 —	0,0042 —	0,0018 —	0,0008 —	0,0004 —

der Ränder) qualitativ ändern, läßt sich leicht beurteilen, wenn man bedenkt, daß dann alle Größen Werte annehmen müssen, die zwischen jenen des Grundfalles ($k = \infty$) und des Falles vollkommen freier Ränder ($k = 0$) liegen müssen und daß in letzterem Falle unter der hier gemachten Voraussetzung $\mu = 0$ die Biegungsfläche in einen Zylinder übergeht, dessen Erzeugende parallel zur y-Achse verlaufen. Im folgenden sollen sämtliche Größen, die sich auf den Grundfall beziehen, den Zeiger 0, jene, die die Abweichung hievon infolge der Elastizität der Träger angeben, den Zeiger 1 erhalten; die wirklichen Werte werden also immer durch Addition der mit den Zeigern 0 und 1 behafteten Werte erhalten.

Daß die Senkungen sämtlicher Plattenpunkte durch die Nachgiebigkeit der Träger eine Vergrößerung erfahren, dürfte ohne weiteres einleuchten. Um eine Vorstellung von der Größenordnung der zusätzlichen Durchbiegung zu erhalten, werde bemerkt, daß beispielsweise für eine quadratische Platte die Durchbiegung in der Mitte im Grundfall

$$w_0\,(0,0) = 0{,}780\,\frac{p\,a^4}{F_1 h^3}$$

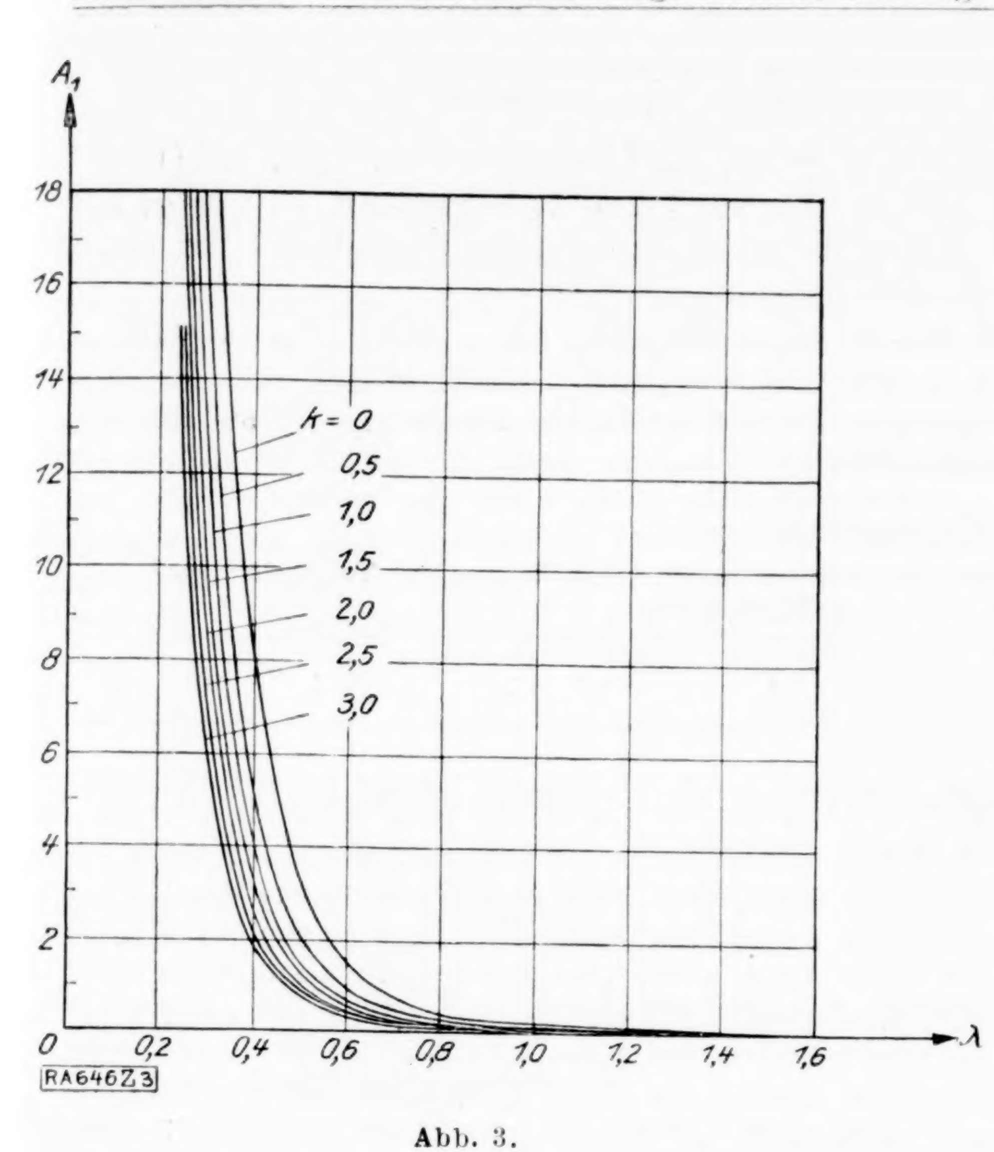


Abb. 3.

ist, während z. B. für $k = 1$ hinzukommt

$$w_1(0,0) = A_1 = 0{,}763 \frac{p a^4}{E_1 h^3},$$

so daß die ganze Senkung beträgt:

$$1{,}543 \frac{p a^4}{E_1 h^3}.$$

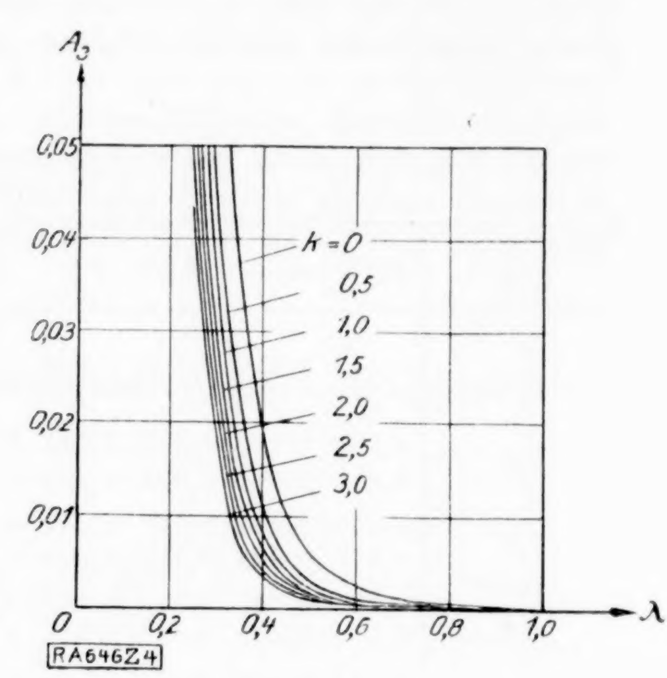


Abb. 4.

Die Senkung der Randträgermitten beträgt

$$w_1(o,b) = A_1 (\mathfrak{Cof}\ \omega_1 - f_1 \mathfrak{Sin}\ \omega_1) = \frac{A_1 \gamma_1}{\omega_1^4}.$$

Wieder für eine quadratische Platte und $k = 1$ wird

$$w_1(o,b) = 1{,}113 \frac{p a^4}{E_1 h^3}.$$

Die zusätzlichen Werte der Biegungsmomente bezeichnen wir mit s_{x1} bzw. s_{y1}; sie sind gegeben durch die Formeln

$$s_{x1} = -\frac{E_1 h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \qquad s_{y1} = -\frac{E_1 h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)^{1)}.$$

Für die Bemessung maßgebend sind die Werte dieser Größen im Plattenmittelpunkt. Sie nehmen hier, wenn nur die Glieder mit $m = 1$ und $m = 3$ berücksichtigt werden, die Form an

$$s_{x1} = \frac{8 \lambda^4}{\pi} (A_1' + 9 A_3') p a^2, \qquad s_{y1} = -\frac{8 \lambda^4}{\pi} \left[A_1' \left(1 - \frac{2 f_1}{\omega_1}\right) + 9 A_3' \left(1 - \frac{2 f_3}{\omega_3}\right) \right] p a^2 \quad (17\text{a}).$$

Die Momente des Grundfalles könnten nach den Formeln

$$s_{x0} = -\frac{E_1 h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \text{ bzw. } s_{y0} = -\frac{E_1 h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

aus dem Ansatze (9) gefunden werden. Einfacher ist es jedoch, wenn die s_1 schon berechnet vorliegen, die s_0 auf Grund folgender Ueberlegungen zu bestimmen:

Wegen der zylindrischen Form der Biegungsfläche im Falle $k = 0$ müssen die $s_x (= s_{x0} + s_{x1})$ längs einer Geraden $x = c$ konstant sein. Für $c = 0$ muß also z. B. $s_x(0,0) = s_x(0,b)$ sein, d. h.

$$s_{x0}(0,0) + s_{x1,\,k=0}(0,0) = s_{x0}(0,b) + s_{x1,\,k=0}(0,b).$$

[1]) S. z. B. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe usw., S. 5, Gl. (8), wenn darin, entsprechend $\mu = 0$, $m = \infty$ gesetzt wird.

Da aber $s_{x0}(0, b) = 0$ und $s_{x1,\, k=0}(0, b) = \frac{p(2a)^2}{8} = 0{,}5\, p a^2$,

folgt $$s_{x0}(0{,}0) = 0{,}5\, p a^2 - s_{x1,\, k=0}(0{,}0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Ferner müssen für $k = 0$ die s_y in der ganzen Platte verschwinden, da infolge der Zylinderform der Biegungsfläche die Krümmung in der y-Richtung überall null ist; somit ist beispielsweise auch $s_y(0{,}0) = s_{y0}(0{,}0) + s_{y1,\, k=0}(0{,}0) = 0$

oder $$s_{y0}(0{,}0) = -s_{y1,\, k=0}(0{,}0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Auf diese Weise wurden die $s_{x0}(0{,}0)$ und $s_{y0}(0{,}0)$ ermittelt und mit den entsprechenden s_{x1} bzw. s_{y1} zu den endgiltigen s_x- und s_y-Werten vereinigt, wie sie die folgende Zahlentafel angibt. (Vergl. auch Abb. 5).

Zahlentafel 4.

Werte $s_x(0{,}0)$ [oben] und $s_y(0{,}0)$ [unten] für runde k-Werte. Die Zahlen der Tafel sind noch mit pa^2 zu multiplizieren.

k \ λ	0,25	0,33	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0,333	0,334	0,334	0,337	0,340	0,344	0,350	0,357	0,365	0,381	0,398	0,414	0,429	0,442
	0,010	0,017	0,023	0,032	0,040	0,047	0,051	0,055	0,056	0,056	0,053	0,048	0,041	0,035
1,0	0,250	0,251	0,251	0,256	0,261	0,269	0,280	0,291	0,305	0,331	0,358	0,382	0,404	0,424
	0,016	0,026	0,035	0,048	0,060	0,070	0,076	0,081	0,082	0,079	0,074	0,065	0,056	0,047
1,5	0,200	0,201	0,202	0,208	0,215	0,226	0,239	0,254	0,271	0,304	0,336	0,366	0,392	0,414
	0,019	0,031	0.042	0,058	0,072	0,083	0,090	0,095	0,096	0,092	0,085	0,074	0,063	0,052
2,0	0,167	0,168	0.169	0,176	0,185	0,197	0,213	0,230	0,249	0,287	0,323	0,356	0,384	0,409
	0,021	0,035	0,047	0,064	0,080	0,092	0,099	0,104	0,105	0,101	0,092	0,080	0,067	0,056
2,5	0,143	0,144	0,146	0,153	0,163	0,177	0 194	0,213	0,233	0,275	0,314	0,349	0,379	0,405
	0,022	0,037	0,050	0,069	0,085	0,098	0,106	0,111	0,111	0,106	0,097	0,084	0,070	0,058
3,0	0,125	0,127	0,128	0,136	0,147	0,161	0,180	0,200	0,222	0,266	0,307	0,344	0,376	0,403
	0,023	0,039	0,052	0,072	0,089	0,103	0,110	0,116	0,116	0,110	0,100	0,086	0,072	0,059

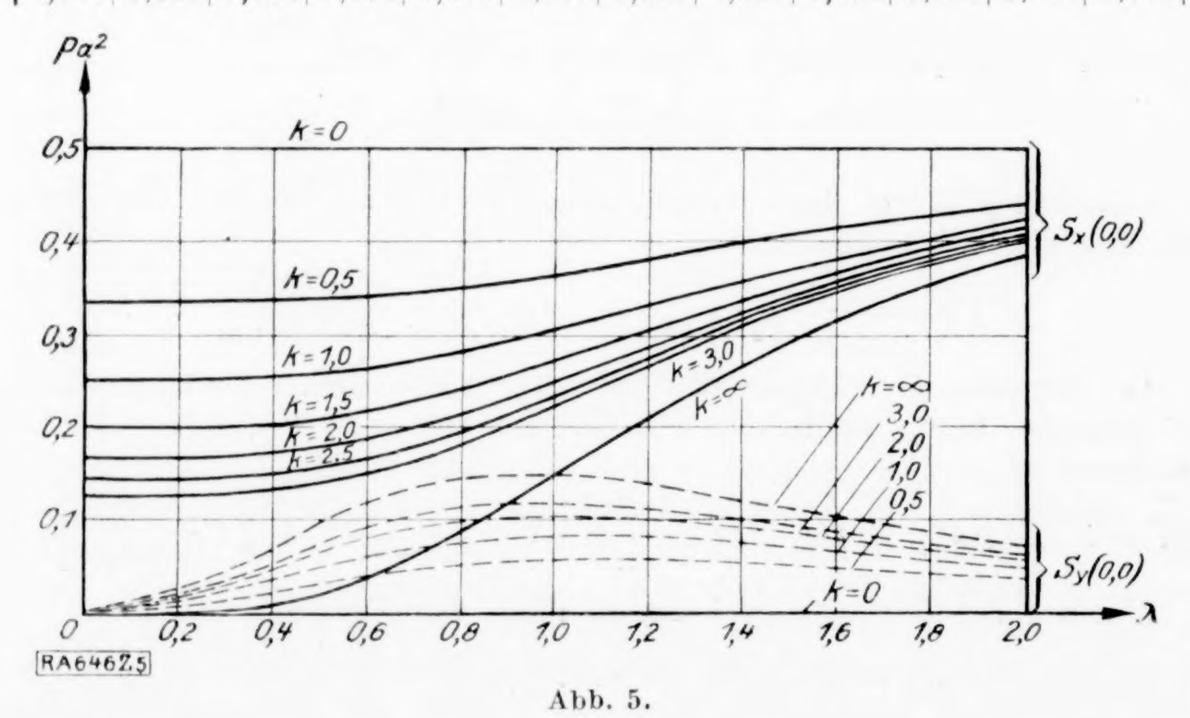


Abb. 5.

Zum Vergleich dieser Werte mit den Grundwerten sei noch die folgende Zahlentafel hergesetzt.

Zahlentafel 5.

Grundwerte der Biegungsmomente im Plattenmittelpunkt. Multiplikator pa^2.

λ	0,25	0,33	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$s_{x0}(0{,}0)$	0,000	0,003	0,006	0 018	0.035	0,058	0,086	0,116	0,148	0,210	0,266	0,314	0,354	0,387
$s_{y0}(0{,}0)$	0,031	0,052	0,070	0,096	0,118	0,134	0,143	0,148	0,148	0,137	0,121	0,103	0,085	0,069

Das größte Biegungsmoment tritt im Plattenmittelpunkt auf und wirkt im Grundfall parallel zu den kurzen Seiten. Die Nachgiebigkeit der Randträger bewirkt nun, wenn sie an den kurzen Seiten liegen, eine Erhöhung, wenn sie an den Langseiten liegen (wohl der häufiger vorkommende Fall), aber eine Verminderung des Maximalmomentes des Grundfalls und zwar um so mehr, je kleiner k ist. Allerdings erhöht sich dafür das Moment in der Längsrichtung der Platte und wird bei längeren Platten und nicht zu starken Randträgern schließlich sogar allein in Betracht kommen. Zu jedem Seitenverhältnis $\lambda < 1$ gibt es ein Steifigkeitsverhältnis k, für das $s_x(0,0)$ und $s_y(0,0)$ einander gleich werden. Sind die trägerunterstützten Seiten gegenüber den festen Seiten verhältnismäßig lang, wie dies bei Brückenfahrbahnplatten aus Eisenbeton auf eisernen Längsträgern der Fall ist, so kann demnach die Spannung in Richtung der Längsträger jene quer zu denselben um ein bedeutendes übertreffen. Es ist dies bei den gebräuchlichen Abmessungen auch tatsächlich der Fall im Gegensatz zu der üblichen Berechnung und Bewehrung solcher Platten. Wollte man eine solche Beanspruchung vermeiden, so müßte man die Längsträger übermäßig steif ausbilden. Quadratische Platten werden immer in Richtung der Randträger am stärksten beansprucht. Schließlich sei noch angeführt, daß

$$\lim_{\lambda=0} s_{x,1}(0,0) = \frac{1}{2(1+k)} p a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

3. Die Auflagerdrücke und die Drillungsmomente. Die Auflagerdrücke auf den Randträgern sind nach (3) gegeben durch den Ausdruck

$$v_b = E_2 J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\bigg|_{y=\pm b} = E_2 J \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}\bigg|_{y=\pm b} \;^{1)}$$

$$= \frac{24 \pi \lambda^4 E_2 J}{E_1 h^3} p \sum m^4 A_m' (\mathfrak{Cof}\, \omega_m - f_m \mathfrak{Sin}\, \omega_m) \cos \frac{m \pi x}{2a} \quad (m = 1, 3, 5 \ldots) \quad (21)$$

oder nach einigen Umformungen

$$v_b = \frac{1}{b^4} \sum \frac{\alpha_m}{\dfrac{\beta_m}{\gamma_m E_2 J} + \dfrac{12}{E_1 b h^3}} \cos \frac{m \pi x}{2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21a)$$

Den größten Wert nimmt dieser Ausdruck für $J = \infty$ (Grundfall) an; es wird in diesem Falle

$$v_b = v_{b0} = \frac{32 \lambda}{\pi^3} pa \sum \alpha_m' \cos \frac{m \pi x}{2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Speziell für die Trägermitte ergibt sich

$$v_{b0}(0) = \frac{32 \lambda}{\pi^3} pa \sum \alpha_m' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Mit abnehmendem J nimmt auch v_b ab, um für $J = 0$ (vollkommen freie Ränder), wie es sein muß, null zu werden.

Der Verlauf der Auflagerdrücke auf den festen Rändern $x = \pm a$ wird durch die Funktion beschrieben

$$v_a = \frac{E_1 h^3}{12} \left[\frac{\partial^3 (w_0 + w_1)}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 (w_0 + w_1)}{\partial x \, \partial y^2} \right]_{x=\pm a} = v_{a0} + v_{a1}.$$

Für $k = 0$ muß $v_a = pa$ werden. Dies gibt die Möglichkeit, die Grundwerte der Auflagerdrücke zu berechnen. Denn aus

$$v_a = v_{a0} + v_{a1,k=0} = pa$$

folgt $\quad v_{a0} = pa - v_{a1,k=0}$ und somit $v_a = pa - (v_{a1,k=0} - v_{a1}) \quad . \; . \; . \quad (24).$

Anderseits ist $\quad v_{a1,k=0} = pa - v_{a0}$.

Da v_{a0} im allgemeinen kleiner als pa ist, wird $v_{a1,k=0}$ im allgemeinen positiv, d. h. durch die Elastizität der Randträger vergrößern sich die Auflagerdrücke auf den festen Rändern. Bei schmalen Platten kann allerdings in der Mitte der Langseiten[2] v_{a0}

[1]) Denn $\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\Big|_{y=\pm b} = 0$.

[2]) S. z. B in den Tafeln 5 und 6 auf S. 78 und 79 des Marcusschen Buches die Werte α_x für $\frac{x}{a} = -1$ und $\frac{y}{b} = 0$.

um ein geringes größer als pa werden; in diesen Fällen bewirkt die Elastizität der Träger in der Mitte des festen Randes eine geringfügige Entlastung. Da $v_{a1, k=\infty} = 0$ und alle v_{a1}-Werte zwischen den durch $k = 0$ und $k = \infty$ gegebenen Grenzen liegen, so gelten die über das Vorzeichen von $v_{a1, k=0}$ gemachten Bemerkungen für die v_{a1} schlechtweg, gleichgiltig, welchen Wert k im gegebenen Fall hat. Die Funktion v_{a1} hat die Form

$$v_{a1} = 4\lambda^4 pa \Sigma m^3 A_m' \left[\left(\frac{4 f_m}{\omega_m} - 1 \right) \mathfrak{Cof} \frac{m \pi y}{2a} + f_m \frac{y}{b} \mathfrak{Sin} \frac{m \pi y}{2a} \right] \quad . \quad . \quad (25);$$

daher wird nach (24)

$$v_a = pa \left[1 - 4\lambda^4 \Sigma m^3 A'_{m, k=0} - A_m' \left(\frac{4 f_m}{\omega_m} - 1 \right) \mathfrak{Cof} \frac{m \pi y}{2a} + f_m \frac{y}{b} \mathfrak{Sin} \frac{m \pi y}{2a} \right] \quad (26).$$

Für die Mitten der festen Ränder erhält man den Sonderwert.

$$v_a(0) = pa \left[1 - 4\lambda^4 \Sigma m^3 A_m'{}_{, k=0} - A_m \left(\frac{4 f_m}{\omega_m} - 1 \right) \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Die Summen für die Auflagerdrücke konvergieren verhältnismäßig langsam, so daß hier die Berechnung einer größeren Zahl von Gliedern nicht zu vermeiden ist.

Die zusätzlichen Drillungsmomente nehmen die Form an

$$t_1 = -\frac{F_1 h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} {}^{1)}$$

$$= \frac{8 \lambda^4}{\pi} pa^2 \Sigma m^2 A_m' \left[\left(1 - \frac{f_m}{\omega_m} \right) \mathfrak{Sin} \frac{m \pi y}{2a} - f_m \frac{y}{b} \mathfrak{Cof} \frac{m \pi y}{2a} \right] \sin \frac{m \pi x}{2a} \quad (28).$$

Sie verursachen durchwegs eine Verringerung der Drillungsmomente des Grundfalles. Denn für $k = \infty$ werden alle $t_1 = 0$, während für $k = 0$ überall $t_0 + t_{1, k=0} = 0$ oder

$$t_{1, k=0} = -t_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

wird. Für irgendeinen endlichen k-Wert wird demnach stets die Ungleichung

$$-t_0 < t_1 < 0$$

bestehen; die t_1 sind also immer von entgegengesetztem Vorzeichen wie die t_0 und dem absoluten Betrage nach kleiner als diese. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen. In der Ecke $x = a$, $y = b$ wird

$$t_1 = \bar{t}_1 = \frac{8 \lambda^4}{\pi} pa^2 \Sigma m^2 A_m' \left[\left(1 - \frac{f_m}{\omega_m} \right) \mathfrak{Sin}\, \omega_m - f_m \mathfrak{Cof}\, \omega_m \right]$$

und nach (29)

$$\bar{t}_0 = -\frac{8 \lambda^4}{\pi} pa^2 \Sigma m^2 A_m'{}_{, k=0} \left[\left(1 - \frac{f_m}{\omega_m} \right) \mathfrak{Sin}\, \omega_m - f_m \mathfrak{Cof}\, \omega_m \right],$$

somit

$$\bar{t} = -\frac{8 \lambda^4}{\pi} pa^2 \Sigma m^2 A_m'{}_{, k=0} - A_m' \left[\left(1 - \frac{f_m}{\omega_m} \right) \mathfrak{Sin}\, \omega_m - f_m \mathfrak{Cof}\, \omega_m \right] \quad . \quad (30).$$

Rechteckige, ringsum frei aufliegende Platten haben bekanntlich das Bestreben, die Ecken von der Unterlage abzuheben, so daß zur Herstellung des Gleichgewichtes noch gewisse abwärtsgerichtete Einzelkräfte in den Ecken angebracht werden müssen, deren Größe $= 2\bar{t}$ ist. Dieses Bestreben des Abhebens der Ecken wird durch die Elastizität der Träger demnach auch verringert und verschwindet mit den Drillungsmomenten bei $k = 0$.

4. Zahlenbeispiel. Es sei eine rechteckige Betonplatte von 200 cm Länge ($a = 100$ cm), 100 cm Breite ($b = 50$ cm) und $h = 20$ cm Dicke zu untersuchen, die an den Langseiten durch je einen I-Träger P. N. 25 ($J = 5\,556$ cm^4) unterstützt sei. Der Elastizitätsmodul des Betons sei mit $E_1 = 140\,000$ kg/cm^2, jener des Eisens mit $E_2 = 2\,100\,000$ kg/cm^2 angenommen. Die Belastung sei gleichmäßig über die ganze Platte verteilt und betrage $p = 0{,}4$ kg/cm^2.

Dann werden

$$\lambda = \frac{50}{100} = 0{,}5, \qquad \frac{b h^3}{12} = \frac{50 \cdot 20^3}{12} = 33\,333, \qquad k = \frac{E_2 J}{E_1 \frac{b h^3}{12}} = \frac{2\,100\,000 \cdot 5556}{140\,000 \cdot 33\,333} = 2{,}50.$$

Aus Zahlentafel 3 findet man für $\lambda = 0{,}5$ und $k = 2{,}5$ die Werte

$$A_1' = 0{,}859, \quad A_3' = -0{,}00106.$$

---

1) Vergl. z. B. in dem Buche von Marcus, S. 5, die dritte der Gl. (8), wenn darin, entsprechend unserer Annahme $\mu = 0$, $m = \infty$ gesetzt wird.

Ferner wird der Multiplikator

$$12{,}3846 \left(\frac{b}{h}\right)^3 \frac{p\,b}{E_1} = 0{,}02764.$$

Berücksichtigt man lediglich das Glied mit A_1, so erhält man

$$w_1(0{,}0) = A_1 = 0{,}02764 \cdot 0{,}859 = 0{,}0237 \text{ cm}.$$

Die w_1-Werte längs der x-Achse würde man durch Multiplikation dieser Zahl mit $\cos\frac{\pi x}{2a}$, jene längs der y-Achse durch Multiplikation mit $\mathfrak{Cof}\frac{\pi y}{2a} - f_1 \frac{y}{b} \mathfrak{Sin}\frac{\pi y}{2a}$ erhalten, wie aus (1) folgt, wenn die dortige Summe lediglich auf das Glied mit $m = 1$ beschränkt und nach (6) $B_1 = -\frac{f_1}{b} A_1$ gesetzt wird. Speziell für die Mitten der Randträger erhält man mit $y = b$, $\frac{\pi b}{2a} = \frac{\pi}{4}$, $\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{4} = 1{,}3246$, $f_1 = 0{,}3123$ (s. Zahlentafel 1) und $\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{4} = 0{,}8687$

$$w_1(0, b) = 0{,}0250 \text{ cm}.$$

Um die wirklichen Durchbiegungen zu erhalten, sind zu den w_1-Werten noch die Werte w_0 hinzuzufügen. Nach den Tabellen von Lewe[1]) findet man für unseren Fall

$$w_0(0{,}0) = 0{,}16207 \cdot \frac{12\,p\,b^4}{E_1\,h^3} = 0{,}0043 \text{ cm}, \quad w_0(0, b) = 0.$$

Demnach $w(0{,}0) = 0{,}0237 + 0{,}0043 = 0{,}0280$ cm, $w(0, b) = w_1(0, b) = 0{,}0250$ cm.

Die für die Bemessung maßgebenden Biegungsmomente im Plattenmitttelpunkt können unmittelbar aus Zahlentafel 4 entnommen werden zu

$$s_x(0{,}0) = 0{,}153\,pa^2 = 0{,}153 \cdot 0{,}4 \cdot 100^2 = 612 \text{ kgcm/cm}.$$

$$s_y(0{,}0) = 0{,}069\,pa^2 = 276 \text{ kgcm/cm}.$$

Die zugehörigen Randspannungen betragen

$$\sigma_x(0{,}0) = \frac{612}{\frac{h^2}{6}} = 9{,}18 \text{ kg/cm}^2, \qquad \sigma_y(0{,}0) = \frac{276}{\frac{h^2}{6}} = 4{,}14 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Drillungsmomente in den Ecken sind nach (30) zu berechnen. Wollen wir hier die ersten beiden Glieder der Summe mit $m = 1$ und $m = 3$ berücksichtigen, so müssen wir uns zunächst ermitteln:

$$|A_1'{}_{,k=0} - A_1'| = 2{,}219, \quad 1 - \frac{f_1}{\omega_1} = 0{,}602, \quad \mathfrak{Sin}\,\omega_1 = 0{,}8687, \quad \mathfrak{Cof}\,\omega_1 = 1{,}3246$$

$$|A_3'{}_{,k=0} - A_3'| = 0{,}00435, \quad 1 - \frac{f_3}{\omega_3} = 0{,}768, \quad \mathfrak{Sin}\,\omega_3 = 5{,}2280, \quad \mathfrak{Cof}\,\omega_3 = 5{,}3228.$$

Damit findet man für den hinter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck

für das Glied mit $m = 1$ 0,2425
für das Glied mit $m = 3$ 0,0434
d. i. zusammen 0,2859

Diese Zahl mit dem vor dem Summenzeichen stehenden Faktor $\frac{8\,\lambda^4}{\pi} \cdot pa^2 = 636{,}6$ multipliziert, gibt

$$\bar{t} = -182 \text{ kgcm/cm}.$$

Schließlich ermitteln wir noch die in den Seitenmitten auftretenden Auflagerdrücke. Wir wollen uns dabei mit der Berechnung der drei ersten Glieder der bezüglichen Summen ($m = 1, 3, 5$) begnügen, obwohl die weiteren Glieder immerhin noch ins Gewicht fallende Korrekturen ergeben können. — Zunächst müssen wir hier die Werte A_5' und $A_5'{}_{,k=0}$, die aus den Zahlentafeln nicht zu entnehmen sind, berechnen. Für den Zähler α_5' folgt aus (14), indem man darin $m = 5$ und $r = 3$ setzt,

$$|\alpha_5'| = \frac{3}{5} \left|\alpha_3'\left(\frac{5}{6}\right)\right| = \frac{3}{5} \cdot 0{,}1572 = 0{,}0943,$$

wobei $\left|\alpha_3'\left(\frac{5}{6}\right)\right|$ aus Zahlentafel 2 durch Interpolation erhalten wurde. Die Nenner von A_5' bzw. $A_5'{}_{,k=0}$ ergeben sich nach der Näherungsformel (16) mit $\omega_5 = \frac{5\,\pi}{4}$ zu

$$N_{k=2{,}5} = 5869 \text{ und } N_{k=0} = 779$$

---

[1]) Lewe, Die strenge Lösung des Pilzdeckenproblems, Lastfall 22.

und damit $A_5' = \frac{0{,}0943}{5869} = 0{,}000016$, $A_5'{}_{,k=0} = \frac{0{,}0943}{779} = 0{,}000121$

Ferner findet man nach (8) $f_5 = 0{,}663$.

Weiter wird

$$A_1'{}_{,k=0} - A_1'\left(\frac{4f_1}{\omega_1} - 1\right) = 2{,}219 \cdot 0{,}5905 \qquad = \quad 1{,}3103$$

$$3^3\left[A_3'{}_{,k=0} - A_3'\left(\frac{4f_3}{\omega_3} - 1\right)\right] = 27 \cdot 0{,}00435 \cdot (-0{,}0731) = -0{,}0086$$

$$5^3\left[A_5'{}_{,k=0} - A_5'\left(\frac{4f_5}{\omega_4} - 1\right)\right] = 125 \cdot 0{,}000105 \cdot (-0{,}325) = -0{,}0043$$

zusammen 1,2974.

Demnach lt. (27) der Druck in Mitte des festen Randes

$$v_a(0) = 0{,}4 \cdot 100\left[1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 1{,}2974\right] = 27{,}0 \text{ kg/cm}.$$

Den Auflagerdruck in Mitte des elastisch gestützten Randes berechnen wir nach (21), indem wir darin $x = 0$ setzen. Wir finden

$$A_1'(\mathfrak{Cof}\,\omega_1 - f_1\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1) = 0{,}859 \cdot 1{,}0534 = \quad 0{,}9049$$

$$3^4 A_3'(\mathfrak{Cof}\,\omega_3 - f_3\,\mathfrak{Sin}\,\omega_3) = 81 \cdot (-0{,}00106) \cdot 2{,}4684 = -0{,}2119$$

$$5^4 A_5'(\mathfrak{Cof}\,\omega_5 - f_5\,\mathfrak{Sin}\,\omega_5) = 625 \cdot 0{,}000016 \cdot 8{,}569 = \quad 0{,}0857$$

zusammen 0,7787.

Endlich wird $\frac{24\,\pi\,\lambda^4 E_2\, r}{E_1\, h^3}\, p = 19{,}637$,

so daß $v_b(0) = 19{,}637 \cdot 0{,}7787 = 15{,}3$ kg/cm.

646

Theorie der Leitung von Wechselstrom durch die Erde.

Von **G. HABERLAND** in Breslau.

1. Einführung. Dient die Erde als Rückleitung für einen Wechselstrom, dessen Hinleitung eine Freileitung oder ein Kabel ist, so fließen die Erdströme in einiger Entfernung von den Erdungsstellen parallel zur Hinleitung und haben nur in deren Umgebung merkliche Größe.

Ueber die Verteilung und die Größe des Erdstromes sind in letzter Zeit von O. Mayr[1]) und R. Rüdenberg[2]) theoretische Untersuchungen angestellt. O. Mayr nimmt an, daß nur eine unendlich dünne Platte an der Oberfläche der Erde leitend ist und löst das Problem in einer für niedere und mittlere Frequenzen hinreichend strengen Form. R. Rüdenberg setzt voraus, daß die Erde ein homogener Körper ist, und baut seine Ableitung auf der willkürlichen Annahme auf, daß die magnetischen Kraftlinien Kreise sind, deren Mittelpunkt in der Zuleitung liegt. Im nachstehenden Aufsatz wird angenommen, daß die Erde zwar im allgemeinen gleichförmige Leitfähigkeit besitzt, aber an der Oberfläche von einer dünnen besser leitenden Schicht bedeckt ist. Durch diese Annahme soll dem Umstande Rechnung getragen werden, daß die oberen lockeren Schichten meist einen höheren Wassergehalt haben als die unteren und daher besser leiten. Bei der Lösung der Aufgabe werden die Maxwellschen Gleichungen zugrunde gelegt, willkürliche Annahmen sind vermieden. Die Verschiebungsströme werden auch hier, wie bei O. Mayr, vernachlässigt; die Ergebnisse sind daher für Hochfrequenz nicht brauchbar.

Spezialisiert man die vorliegende Aufgabe auf den Fall, daß die besser leitende Oberflächenschicht vernachlässigt wird, so erhält man die strenge Lösung des von R. Rüdenberg behandelten Problems. Es zeigt sich, daß dessen Annahme konzentrischer magnetischer Kraftlinien für die nächste Umgebung der Hinleitung zu einer brauchbaren Annäherung führt, in weiterer Entfernung dagegen auch in der Größenordnung unrichtige Resultate ergibt. Der innere Grund dafür liegt darin, daß der elektromagnetische Zustand an der Oberfläche eines leitenden von Wechselstrom durchflossenen Körpers von dem Zu-

[1]) Otto Mayr, Elektrotechnische Zeitschrift 1925, S. 1352.

[2]) Reinhold Rüdenberg, diese Zeitschrift, Bd. 5, S. 361.

stand im Inneren gänzlich abweicht. R. Rüdenbergs Rechnungen führen nicht zu einfacheren Ergebnissen, seine Formeln sind für weitere Entfernung sogar unhandlicher als die der strengen Lösung. Ihren Vorzug bildet lediglich die bequeme Herleitung.

Die nachstehenden Abschnitte behandeln nur den theoretischen Teil der Aufgabe. Die praktischen Folgerungen und die Prüfung anhand von Versuchsergebnissen bringt ein Aufsatz, der in der Elektrot. Zeitschrift erscheinen wird.

2. Allgemeine Lösung. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Fernleitung des Stromes durch eine Oberleitung erfolgt. Eine kleine Aenderung der Rechnung führt zu den Ergebnissen für Erdkabel. Doch ist von der Behandlung dieses Falles abgesehen, weil ein Erdkabel stets so nahe der Erdoberfläche verlegt wird, daß man es ohne merklichen Fehler als auf dieser ruhend annehmen und daher als Spezialfall der Oberleitung ansehen kann.

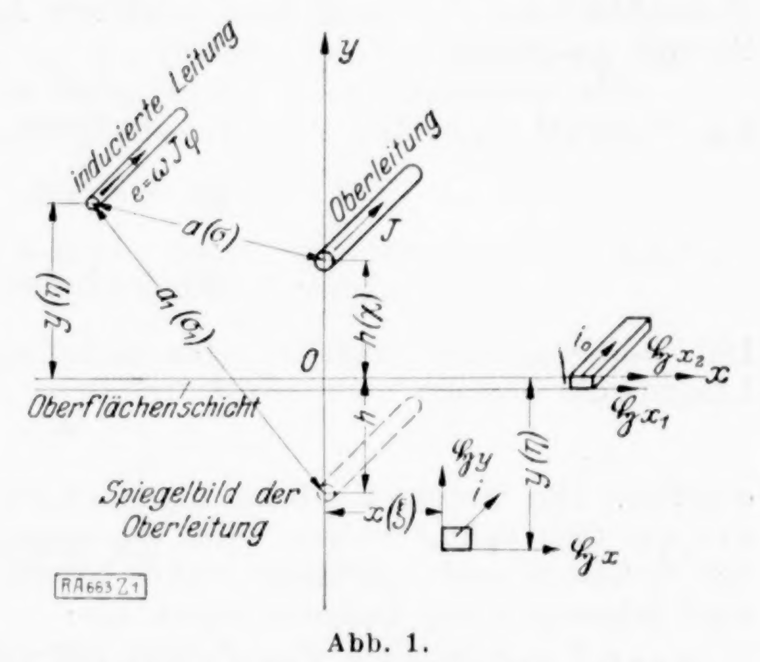


Abb. 1.
Bezeichnungen (eingeklammert dimensionslose Bezeichnungen).

Da die Verschiebungsströme nicht berücksichtigt werden, führt die Aufgabe auf ein ebenes Problem. In allen Ebenen senkrecht zur Leitung ist der Verlauf der magnetischen Kraftlinien der gleiche, und die Stromdichte in der Erde hat in allen diesen Ebenen dieselbe Verteilung. Man lege die XY-Ebene senkrecht zur Leitung, die X-Achse in die Oberfläche und die Y-Achse durch die Leitungsmitte. Alle Größen sind auf das elektromagnetische Maßsystem bezogen. Die Bezeichnungen sind durch die Abb. 1 erläutert und haben folgende Bedeutung:

- J Leitungsstrom,
- i Stromdichte in der Erde für 1 cm²,
- i_0 » » » Oberflächenschicht für 1 cm,
- ϱ spezifischer Widerstand der Erde,
- $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ Komponenten der magnetischen Feldstärke,
- h Leitungshöhe,
- d ideelle Dicke der Oberflächenschicht, d. h. die Stärke einer Erdschicht, deren Leitfähigkeit gleich der Leitfähigkeit der Oberflächenschicht ist,
- x, y Koordinaten eines Bezugspunktes,
- a Abstand eines Bezugspunktes von der Leitung,
- a_1 » » » vom Spiegelbild der Leitung,
- ω Kreisfrequenz des Leitungsstromes.

Nimmt man an, daß die wirksamen Erdschichten von ferromagnetischen Materialien frei sind, und vernachlässigt man die Verschiebungsströme, setzt man also die Permabilität gleich 1 und die Dielektrizitätskonstante gleich Null, so erhält man aus den Maxwellschen Gleichungen folgende Beziehungen:

$$\text{für die Luft} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1\,\mathrm{a})$$

$$\text{für die Erde} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = 4\,\pi\, i \quad \ldots \ldots \quad (1\,\mathrm{b})$$

$$\varrho \frac{\partial i}{\partial x} = - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad (2), \qquad \varrho \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\text{für Luft und Erde} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Zur Lösung dieser Gleichungen kann man sich der symbolischen Methode bedienen, da allen vorkommenden Wechselstromgrößen sinusförmiger Verlauf zugeschrieben werden darf. Man nehme ein komplexes Potential φ an und setze:

$$i = \frac{J\,\omega}{\varrho}\,\varphi \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\mathfrak{H}_x = - j\,J \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (6\,\mathrm{a}), \qquad \mathfrak{H}_y = + j\,J \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (6\,\mathrm{b}).$$

Die Stromdichte in der Oberflächenschicht ist gleich dem Strom, welchen eine Erdschicht von der ideellen Dicke d beim Potential der Oberfläche führt. Hat also das Potential an der Oberfläche den Wert φ_0 so ist die Stromdichte in der Oberflächenschicht:

$$i_0 = \frac{J\,\omega\,d}{\varrho}\,\varphi_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5\,a).$$

Die reellen positiven Anteile obiger Größen bedeuten die mit dem Leitungsstrom phasengleichen, die imaginären positiven Anteile die dem Leitungsstrom um eine Viertel-Periode voreilenden Komponenten.

Die Gleichungen (1) bis (4) sind durch die Ausdrücke (5) und (6) erfüllt, wenn das Potential folgenden Bedingungen genügt:

$$\text{für die Luft} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7\,a)$$

$$\text{für die Erde} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = j\,\frac{4\,\pi\,\omega}{\varrho}\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7\,b).$$

Die Gleichungen (7) erhalten eine einfachere Form, wenn man als Bezugseinheit für alle Längen die Strecke

$$k = \sqrt{\frac{\varrho}{4\,\pi\,\omega}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

einführt. Die Strecke k soll im folgenden als Eindringungstiefe bezeichnet werden, weil sie, wie sich später zeigen wird, ein angenähertes Maß für die Tiefe ist, bis zu welcher der Erdstrom noch merkliche Größe besitzt. Mit Benutzung der Eindringungstiefe führe man folgende neue Bezeichnungen ein:

$x = k\,\xi$ und $y = k\,\eta$ Koordinaten des Bezugspunktes,
$h = k\,\chi$ Leitungshöhe,
$h + y = k\,(\chi + \eta) = k\,\zeta$ Summe der Höhen von Leitung und Bezugspunkt,
$a = k\,\sigma$ Abstand des Bezugspunktes von der Leitung,
$a_1 = k\,\sigma_1$ » » » vom Spiegelbild der Leitung,
$d = k\,\delta$ ideelle Dicke der Oberflächenschicht.

Die Differentialgleichungen (7) erhalten mit diesen Bezeichnungen die Form:

$$\text{für die Luft} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9\,a)$$

$$\text{für die Erde} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = j\,\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9\,b).$$

Unter den Lösungen dieser Gleichungen sind diejenigen auszuwählen, welche den Grenzbedingungen genügen. Die Grenzbedingungen lauten:

1. In großer Entfernung von der Leitung muß das Potential sowohl für die Luft als auch für die Erde gegen Null konvergieren, weil die Summe aus dem Leitungsstrom und den Erdströmen Null ist:

$$(\varphi)_{\sigma = \infty} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

2. In der Nähe der Oberleitung muß die magnetische Feldstärke sich dem Wert $\mathfrak{H} = \frac{2\,J}{a}$ nähern. Diese Forderung ist, wie aus den Gleichungen 6 hervorgeht, erfüllt, wenn in der Nähe der Oberleitung das Potential folgenden Wert hat:

$$(\varphi)_{\sigma = 0} = 2\,j \log \text{nat}\, \sigma + \text{fct. cont.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

3. An der Erdoberfläche muß die senkrechte Komponente der magnetischen Feldstärke für die Luft und die Erde gleich groß sein, dagegen die wagerechte Komponente einen Sprung erleiden. Denn setzt man die Stromdichte für die Längeneinheit der Oberflächenschicht gleich i_0 (Abb. 1), so besteht, wenn man die Größen für die Luft und die Erde durch die Indizes 1 und 2 unterscheidet, nach Maxwell die Beziehung

$$\mathfrak{H}_{x1} - \mathfrak{H}_{x2} = 4\,\pi\,i_0.$$

Die Grenzbedingungen für das Potential an der Erdoberfläche erhält man, indem man die Feldstärken und Ströme mittels der Gleichungen (5) und (6) durch das Potential ausdrückt, zu

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right)_{\eta = 0} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\right)_{\eta = 0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12\,a)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} = j\,\delta\,(\varphi_2)_{\eta = 0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12\,b).$$

Man bestimmt zunächst partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen (9), welche im Unendlichen verschwinden. Solche Lösungen sind für den Luftraum

$$\varphi_1 = j \log \text{nat} \frac{\xi^2 + (\eta - \chi)^2}{\xi^2 + (\eta + \chi)^2} = 2\, j \log \text{nat} \frac{\sigma}{\sigma_1} \quad \text{und} \quad \varphi_1 = A\, e^{-\alpha \eta} \cos(\alpha\, \xi)\,,$$

wobei α einen beliebigen positiven reellen Parameter bezeichnet. Die erste dieser Lösungen erfüllt auch die Grenzbedingung (11), denn in der Nähe von $\sigma = 0$ ergibt sie $\varphi_1 = 2\, j \log \text{nat}\, \sigma + \text{fct. cont.}$

Eine partikuläre Lösung für den Erdraum, die für $\eta = -\infty$ verschwindet, ist

$$\varphi_2 = A\, e^{+\beta \eta} \cos(\alpha\, \xi)\,,$$

wenn man setzt

$$\beta^2 = \alpha^2 + j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Durch Komposition der gefundenen Lösungen kann man auch die Grenzbedingungen (12) an der Erdoberfläche erfüllen. Man nehme für den Luftraum

$$\varphi_1 = 2\, j \log \text{nat} \frac{\sigma}{\sigma_1} + \int_0^\infty e^{-\alpha \eta} \cos(\alpha\, \xi)\, A\, d\, \alpha \quad \ldots\ldots \quad (14\,\text{a})$$

und für den Erdraum

$$\varphi_2 = \int_0^\infty e^{\beta \eta} \cos(\alpha\, \xi)\, A\, d\, \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14\,\text{b}),$$

wobei A eine vorläufig unbestimmte Funktion des Parameters α bedeutet.

Die Gleichungen (14) erfüllen die Grenzbedingungen (12a), wenn die Integrale nach α und β differentiierbar sind. Denn es ist

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right)_{\eta = 0} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\right)_{\eta = 0} = -\int_0^\infty \alpha \sin(\alpha\, \xi)\, A\, d\, \alpha.$$

Es ist schließlich noch der Faktor A so zu bestimmen, daß auch die Grenzbedingung (12b) befriedigt wird. Nun erhält man aus Gl. (14a)

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} = -4\, j \frac{\chi}{\xi^2 + \chi^2} - \int_0^\infty \alpha \cos(\alpha\, \xi)\, A\, d\, \alpha.$$

Mit der Beziehung[1])

$$\frac{\chi}{\xi^2 + \chi^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha \chi} \cos(\alpha\, \xi)\, d\, \alpha$$

ergibt sich somit:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} = -4\, j \int_0^\infty e^{-\alpha \chi} \cos(\alpha\, \xi)\, d\, \alpha - \int_0^\infty \alpha \cos(\alpha\, \xi)\, A\, d\, \alpha.$$

Für die Erde findet man aus Gl. (14b)

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} = \int_0^\infty \beta \cos(\alpha\, \xi)\, A\, d\, \alpha.$$

Die Grenzbedingung (12b) lautet:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right)_{\eta = 0} = j\, \delta\, (\varphi_2)_{\eta = 0}.$$

Sie ist erfüllt, wenn

$$-4\, j\, e^{-\alpha \chi} - A\,(\alpha + \beta) = j\, \delta\, A$$

ist, oder mit Berücksichtigung der Beziehung $\beta = \sqrt{\alpha^2 + j}$

$$A = -4\, j \frac{e^{-\alpha \chi}}{\alpha + \beta + j\, \delta} = -4 \frac{e^{-\alpha \chi}\,(\beta - \alpha)}{1 + \delta\,(\beta - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (15).$$

---

[1]) Laska, Formeln, 1894, S. 255.

Durch Einsetzen des Ausdrucks (15) in die Gleichungen (14) erhält man für das Potential

$$\text{in der Luft}\quad \varphi_1 = 2\,j \log\text{nat}\,\frac{\sigma}{\sigma_1} - 4\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\eta+\chi)} \cos(\alpha\,\xi)\,(\beta-\alpha)\,d\,\alpha}{1+\delta\,(\beta-\alpha)} \quad \ldots \quad (16\,\mathbf{a})$$

$$\text{in der Erde}\quad \varphi_2 = -4\int_0^{\infty} \frac{e^{\beta\eta-\alpha\chi} \cos(\alpha\,\xi)\,(\beta-\alpha)\,d\,\alpha}{1+\delta\,(\beta-\alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (16\,\mathbf{b}).$$

Die Werte für das Potential sind in der ganzen Ebene, mit Ausnahme des Ortes der Leitung, endlich, stetig und differentiierbar, erfüllen die Differentialgleichungen (9) und die Grenzbedingungen (10) bis (12) und stellen daher die richtige Lösung des Problems dar.

Mit dem Ausdruck (16) für das Potential erhält man den Erdstrom und die magnetische Feldstärke aus den Gleichungen (5) und (6). Die elektrische Feldstärke an einem Bezugspunkt, d. h. die induzierte Spannung für die Längeneinheit, ist

$$e = J\,\omega\,\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Das Potential ist also nichts anderes als die elektrische Feldstärke für den Strom 1 und die Kreisfrequenz 1 oder als die Fremdinduktivität für die Längeneinheit.

3. Untersuchung des Falles $\delta = 0$. In diesem Abschnitt wird der wichtige Sonderfall behandelt, daß die Erde als homogen angenommen, der Einfluß der besser leitenden Oberflächenschicht also vernachlässigt wird. Die Gleichungen (16) sind für die Anwendung unbequem, sie sollen daher auf eine Form gebracht werden, die für die praktische Rechnung zweckmäßig ist. Zunächst wird das Potential in der Luft untersucht.

Das Potential für die Luft beträgt, wenn man für die Summe aus den Höhen der Leitung und des Bezugspunktes $\zeta = \eta + \chi$ einführt und $\delta = 0$ setzt, nach Gl. (16a)

$$\varphi_1 = 2\,j \log\text{nat}\,\frac{\sigma}{\sigma_1} - 4\int_0^{\infty} e^{-\alpha\zeta} \cos(\alpha\,\xi)\,(\sqrt{\alpha^2+j}-\alpha)\,d\,\alpha \quad \ldots \quad (18).$$

Man zerlege nun den Ausdruck für das Potential in

$$\varphi_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad \ldots \quad (19)$$

mit der Bedeutung

$$u_1 = 2\,j \log\text{nat}\,\frac{\sigma}{\sigma_1} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

$$u_2 = 4\int_0^{\infty} e^{-\alpha\zeta} \cos(\alpha\,\xi)\,\alpha\,d\,\alpha = 4\,\frac{\zeta^2-\xi^2}{(\zeta^2+\xi^2)^2}\text{[1]} \quad (21)$$

$$u_3 = -2\int_0^{\infty} e^{-\alpha\zeta+j\alpha\xi} \sqrt{\alpha^2+j}\,d\,\alpha \quad \ldots \quad (22)$$

$$u_4 = -2\int_0^{\infty} e^{-\alpha\zeta-j\alpha\xi} \sqrt{\alpha^2+j}\,d\,\alpha \quad \ldots \quad (23).$$

Abb. 2.
Integrationswege für Gl. 22 u. 23.

Die beiden letzten Integrale kann man für $\xi > \zeta$ nach dem Cauchyschen Integralsatz über die gebrochenen Wege (Abb. 2) OBA für u_3 und OCA für u_4 erstrecken, da zwischen den Integrationswegen keine Unstetigkeit stattfindet. Die Integrale über die Kreisbogen BA bzw. CA sind Null, weil der Integrand exponentiell verschwindet. Ersetzt man noch α in dem Integral u_3 durch $+\alpha\sqrt{-j}$ und im Integral u_4 durch $-\alpha\sqrt{-j}$, so erhält man

$$u_3 = -2\int_0^{-\infty} e^{j\alpha\sqrt{-j}(\xi+j\zeta)}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\,\alpha$$

$$u_4 = \pm 2\int_0^{-\infty} e^{j\alpha\sqrt{-j}(\xi-j\zeta)}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\,\alpha.$$

[1]) Laska, a. a. O., S. 255.

Die Integranden von u_3 und u_4 haben für $\alpha = -1$ Windungspunkte. Für u_3 ändert sich das Vorzeichen der Wurzel nicht, bei u_4 gilt das obere Vorzeichen für $\alpha > -1$ und das untere für $\alpha < -1$, wie aus Stetigkeitsbetrachtungen folgt.

Aus jedem der beiden Integrale u_3 und u_4 kann man eine Besselsche Funktion dritter Gattung (Hankelsche Funktion 2. Art) abspalten, denn es ist, wenn der reelle Anteil von z positiv und der imaginäre negativ ist[1])

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{H_1^{2}(z)}{z} = \int_{-1}^{-\infty} e^{j z w}\sqrt{1-w^2}\,d w.$$

Mit Benutzung dieser Beziehung ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} u_3 + u_4 = -\pi\left\{\dfrac{H_1^{2}[\sqrt{-j}\,(\xi + j\zeta)]}{\sqrt{-j}\,(\xi + j\zeta)} + \dfrac{H_1^{2}[\sqrt{-j}\,(\xi - j\zeta)]}{\sqrt{-j}\,(\xi - j\zeta)}\right\} \\ \qquad - 4 j \displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{j}\,\xi\alpha}\sin(\sqrt{j}\,\zeta\,\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (24\,\mathrm{a})$$

Für $\xi < \zeta$ erstreckt man die Integrale u_3 und u_4 über den gebrochenen Weg $O\,D\,A$ (Abb. 2). Da zwischen den Integrationswegen keine Unstetigkeit vorkommt und die Integranden im unendlichen exponentiell verschwinden, ergibt sich, wenn man noch α durch $\alpha\sqrt{-j}$ ersetzt:

$$u_3 = -2\int_0^{j\infty} e^{j\alpha\sqrt{j}(\zeta - j\xi)}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha\,, \qquad u_4 = -2\int_0^{j\infty} e^{j\alpha\sqrt{j}(\zeta + j\xi)}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Es gilt nun für die Hankelsche Funktion 1. Art, wenn der reelle Teil von z positiv ist[1]), die Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{H_1^{1}(z)}{z} = -\int_1^{j\infty} e^{j z w}\sqrt{1-w^2}\,d w.$$

Folglich erhält man

$$u_3 + u_4 = \pi\left\{\frac{H_1^{1}[\sqrt{j}\,(\zeta + j\xi)]}{\sqrt{j}\,(\zeta + j\xi)} + \frac{H_1^{1}[\sqrt{j}\,(\zeta - j\xi)]}{\sqrt{j}\,(\zeta - j\xi)}\right\} - 4\int_0^1 e^{-\sqrt{-j}\,\zeta\alpha}\cos(\sqrt{-j}\,\xi\,\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \quad (24\,\mathrm{b}).$$

Mit Benutzung der Umformungen (24) ergeben sich aus dem Ansatz (19) für das Potential in der Luft folgende Gleichungen

a) für $\xi > \zeta$:

$$\varphi = 2 j \log\mathrm{nat}\frac{\sigma}{\sigma_1} + 4\,\frac{\zeta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2} - \pi\left\{\frac{H_1^{2}[\sqrt{-j}\,(\xi + j\zeta)]}{\sqrt{-j}\,(\xi + j\zeta)} + \frac{H_1^{2}[\sqrt{-j}\,(\xi - j\zeta)]}{\sqrt{-j}\,(\xi - j\zeta)}\right\}$$
$$- 4 j\int_0^1 e^{-\sqrt{j}\,\xi\alpha}\sin(\sqrt{j}\,\xi\,\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25\,\mathrm{a})$$

b) für $\xi < \zeta$:

$$\varphi = 2 j \log\mathrm{nat}\frac{\sigma}{\sigma_1} + 4\,\frac{\zeta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2} + \pi\left\{\frac{H_1^{1}[\sqrt{j}\,(\zeta + j\xi)]}{\sqrt{j}\,(\xi + j\zeta)} + \frac{H_1^{1}[\sqrt{j}\,(\zeta - j\xi)]}{\sqrt{j}\,(\zeta - j\xi)}\right\}$$
$$- 4\int_0^1 e^{-\sqrt{-j}\,\xi\alpha}\cos(\sqrt{-j}\,\xi\,\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25\,\mathrm{b}).$$

Die Gleichungen (25) eignen sich gut zur Diskussion und führen für die praktisch wichtigen Fälle zu bequemen Formeln. Zur quantitativen Diskussion ist es nötig, die Eindringungstiefe zu bestimmen, da alle Längen auf diese als Einheit bezogen sind. Die Eindringungstiefe beträgt nach Gl. (8)

$$k = \sqrt{\frac{\varrho}{4\,\pi\,\omega}}.$$

Mit dem Mittelwert $\varrho = 4\cdot 10^{13}\ \mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ erhält man als Eindringungstiefe für die übliche Wechselstromfrequenz $f = 50\ \mathrm{s^{-1}}$ oder $\omega = 2\,\pi\cdot 50\ \mathrm{s^{-1}}$

$$k \approx 10^5\ \mathrm{cm} = 1000\ \mathrm{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26\,\mathrm{a}).$$

---

[1]) Jahnke-Emde, Funktionstafeln 1909, S. 170.

Für Tonfrequenzen, etwa $f = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$, ergibt sich

$$k \approx 2{,}24 \cdot 10^4\ \mathrm{cm} = 224\ \mathrm{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26\,\mathrm{b}).$$

Die gebräuchlichen Leitungshöhen betragen für Starkstrom etwa $h = 10$ m und für Schwachstrom etwa $y = 6$ m. Es ist demnach für Bezugspunkte in der Höhe der Schwachstromleitungen mit obigen Werten für k

$$\zeta = \frac{h + y}{k} = 0{,}016 \text{ bis } 0{,}072.$$

Bis zu Tonfrequenzen herauf und erst recht bei niedrigen Frequenzen ist also die Zahl ζ für Bezugspunkte in der Nähe der Erdoberfläche klein gegen 1. Da man wegen der Unsicherheit, die über die Größe des spezifischen Erdwiderstandes besteht, sich wohl stets mit einer Genauigkeit der Ergebnisse von $\pm$ 10 vH zufrieden geben wird, kann man bei der Entwickelung der Formeln für das Potential nach Potenzen von ζ die höheren Glieder der Entwickelung vernachlässigen und zu einfachen Gleichungen gelangen.

Für Bezugspunkte in der Umgebung der Oberleitung wird man zweckmäßig die Gleichungen (25) nach Potenzen von $\xi + i\,\zeta$ bzw. $\xi - i\,\zeta$ entwickeln. Man erhält, wenn man die Glieder von höherer als der ersten Ordnung vernachlässigt,

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - 2\,j \log \operatorname{nat} \frac{1{,}852}{\sigma} + \frac{\sqrt{8}}{3}(1 - j)\,\zeta \quad \ldots\ldots \quad (27).$$

Man darf bei den vorausgesetzten Ansprüchen an die Genauigkeit das dritte Glied der Formel unterdrücken und kann die Gleichung bis zur Entfernung $\sigma = 0{,}4$ verwenden, da erst bei größeren Abständen die nicht berücksichtigten Glieder der Entwicklung maßgebenden Einfluß gewinnen. Für das Potential ist also im allgemeinen nur der Abstand des Bezugspunktes von der Oberleitung maßgebend. Man bekommt demnach den gleichen Wert für das Potential, wenn man sich die Oberleitung und den Bezugspunkt im Abstand σ auf den Erdboden gelegt denkt und auf diese Anordnung die Gl. (27) anwendet.

Für Bezugspunkte in beliebigem Abstand von der Oberleitung findet man einen einfachen Ausdruck für das Potential, wenn die Oberleitung und der Bezugspunkt auf der Erdoberfläche liegen. Es ist dann $\zeta = 0$, man erhält also aus Gl. (25a)

$$\varphi = -\frac{4}{\xi^2} - 2\,\pi\,\frac{H_1^{\,2}(\xi\sqrt{-j})}{\xi\sqrt{-j}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28).$$

Mit Hilfe von Zahlentafeln der **Hankel**schen Funktionen[1]) kann man das Potential bequem berechnen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Abb. 3 zeichnerisch dargestellt. Die Abb. 3 enthält die reelle und die imaginäre Komponente und den absoluten Wert des Potentials in doppelt-logarithmischen Koordinaten. Das Potential nimmt mit wachsender Entfernung von der Oberleitung ständig ab, in der Nähe der Leitung überwiegt die imaginäre, in größerer Entfernung die reelle Komponente. Die reelle Komponente ist stets dem Leitungsstrom entgegengerichtet, die imaginäre Komponente ist mit wachsender Entfernung abwechselnd nacheilend und voreilend.

Liegt die Oberleitung oder der Bezugspunkt oder beide über dem Erdboden, so setze man $\xi = \sqrt{\sigma_1^{\,2} - \zeta^2}$ und entwickle die Gl. (25a) nach Potenzen von ζ. Das Potential enthält ein von ζ unabhängiges Glied

$$\varphi^x = -\frac{4}{\sigma_1^{\,2}} - 2\,\pi\,\frac{H_1^{\,2}(\sigma_1\sqrt{-j})}{\sigma_1\sqrt{-j}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

Dieser Ausdruck hat dieselbe Form wie die Gl. (28), man kann also seinen Wert der Abb. 3 entnehmen, wenn man für ξ den Abstand des Bezugspunktes vom Spiegelbild der Oberleitung setzt.

Die von ζ abhängigen Glieder ergeben, wenn man die Entwicklung mit der zweiten Potenz abbricht, das Korrekturglied

$$\left.\begin{aligned} c = \frac{4\,\eta\,\chi}{\sigma_1^{\,2}} + \frac{\zeta^2}{\sigma_1^{\,4}}\left[\frac{8}{\sigma_1^{\,2}} - 2\,\pi\,H_0^{\,2}(\sigma_1\sqrt{-j}) + \pi\,\frac{H_1^{\,2}(\sigma_1\sqrt{-j})}{\sigma_1\sqrt{-j}}(4 + j\,\sigma_1^{\,2})\right] \\ + 4\sqrt{-j}\,\zeta\int_0^1 e^{-\sqrt{j}\,\sigma_1\alpha}\cdot\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (30).$$

[1]) Jahnke-Emde, a. a. O. S. 140.

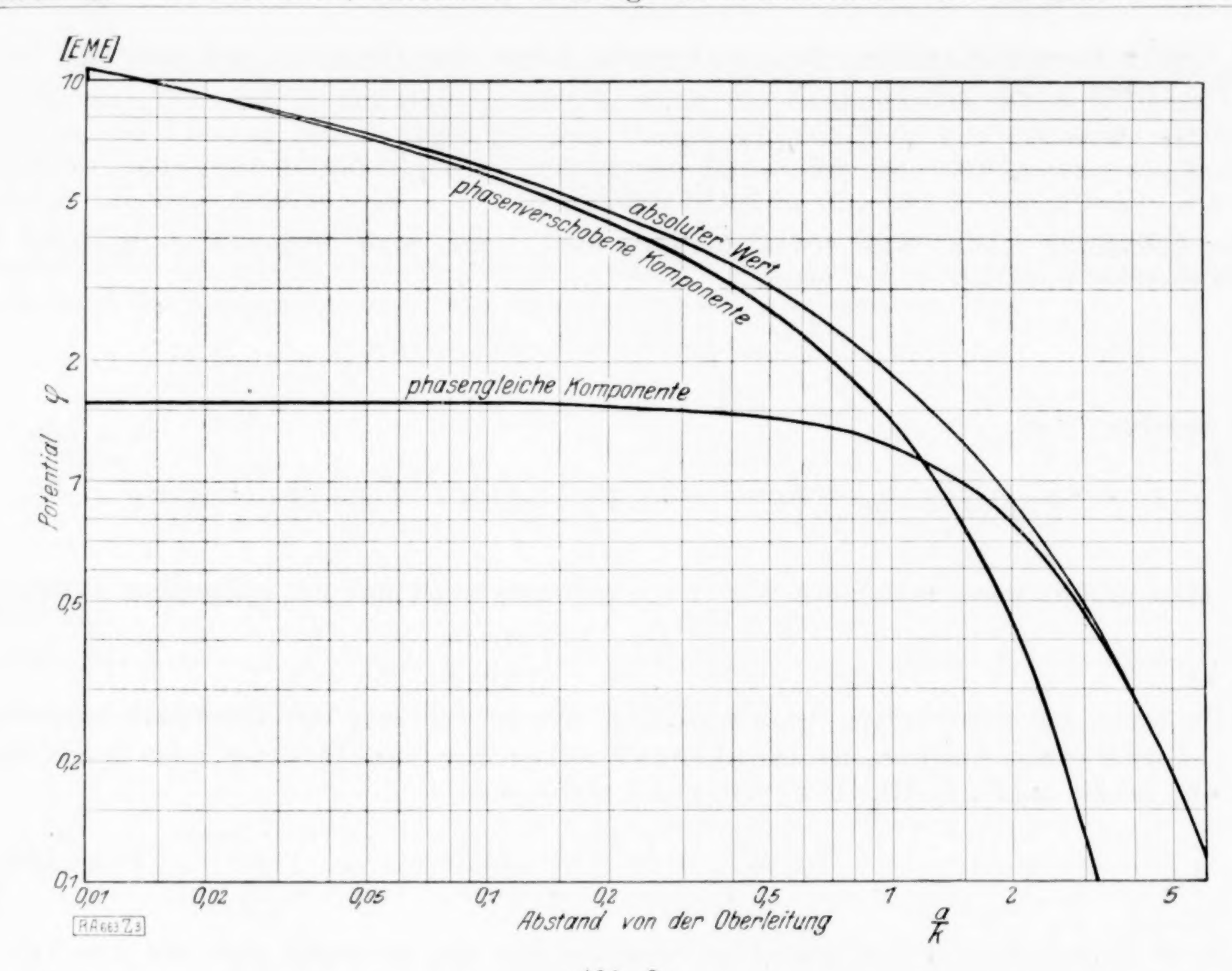


Abb. 3.
Potential an der Erdoberfläche. Die Multiplikation mit 10^{-4} ergibt die Fremdinduktivität in H/km.

Berechnet man das Korrekturglied zahlenmäßig für verschiedene Werte von σ_1 und vergleicht es mit dem Ausdruck 29, so erkennt man, daß die Korrektur c 10 vH des Wertes φ^x nicht überschreitet, wenn $\zeta < 0{,}1$ und $\xi > 0{,}2$ ist. Man darf also bis zu Sprechfrequenzen herauf innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen den Einfluß der Leitungshöhen vernachlässigen und der Berechnung des Potentials die Gl. (29) zugrunde legen.

Für großen Abstand des Bezugspunktes von der Oberleitung wird der Ausdruck für das Potential noch einfacher, weil dann die Hankelsche Funktion exponentiell verschwindet. Für $\xi > 6$ ist ohne merklichen Fehler

$$\varphi = -\frac{4}{\xi^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31).$$

Um ein Bild des elektromagnetischen Zustandes im ganzen Raum zu gewinnen, soll im folgenden noch das Potential in großer Entfernung von der Leitung und für die lotrechte Ebene, die durch die Oberleitung geht, bestimmt werden. Die Leitungshöhe wird, da sie nur in der Nähe der Oberleitung von Bedeutung ist, für diese Rechnung gleich Null gesetzt.

Für großen Abstand des Bezugspunktes von der Leitung kann man die Gleichung (25a) in eine semikonvergente Reihe entwickeln. Der Logarithmus und die Hankelschen Funktionen verschwinden. Der Integrand hat nur in der Nähe von $\alpha = 0$ merklichen Wert. Wenn man von exponentiell verschwindenden Korrekturen des Integrals absieht, kann man $\sqrt{1-\alpha^2}$ nach Potenzen von α entwickeln und erhält, wenn man nur das erste Glied berücksichtigt,

$$\varphi = -4\,\frac{1+\eta\sqrt{j}}{\xi^2+\eta^2} + \frac{8\,\eta^2}{(\xi^4+\eta^2)^2} \approx -4\,\frac{1+\eta\sqrt{j}}{\xi^2+\eta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (32).$$

Für konstantes Potential stellt der Ausdruck (32) die Gleichung von Kreisen dar. Die Aequipotentiallinien in großer Entfernung von der Leitung sind danach Kreise, deren Mittelpunkt senkrecht über der Leitung liegt und deren tiefster Punkt bei der imaginären Komponente die Erdoberfläche berührt, bei der reellen Komponente um $y = k\sqrt{2}$ unter der Erdoberfläche liegt.

Für Bezugspunkte, die senkrecht über der Oberleitung liegen, ergibt Gl. (25 b) mit $\chi = \xi = 0$

$$q = \frac{4}{\eta^2} + 2\pi \frac{H_1^1(\eta\sqrt{j})}{\eta\sqrt{j}} - 4\int_0^1 e^{-\sqrt{-j}\,\eta\,\alpha}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Diese Gleichung kann man etwas vereinfachen, wenn man folgende Darstellung der Besselschen Funktion 1. Art benutzt,

$$\pi\frac{J_1(\eta\sqrt{j})}{\eta\sqrt{j}} = \int_{-1}^{+1} e^{-\sqrt{-j}\,\eta\,\alpha}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha\ ^{1})$$

und beachtet, daß

$$\int_0^1 e^{-\sqrt{-j}\,\eta\,\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-\sqrt{-j}\,\eta\,\alpha}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha - \int_0^1 \mathfrak{Sin}(\sqrt{-j}\,\eta\,\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha$$

ist. Man erhält, wenn man noch $\mathfrak{Sin}(\sqrt{-j}\,\eta\,\alpha)$ entwickelt und die Integration ausführt[2],

$$q = \frac{4}{\eta^2} + \sqrt{-j}\left[2\pi\frac{H_1^1(\eta\sqrt{j}) - J_1(\eta\sqrt{j})}{\eta} + 4\left(\frac{\eta}{3} - \frac{j\,\eta^3}{3!}\,\frac{2}{3\cdot 5} - \frac{\eta^5}{5!}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7} + + \ldots\right)\right] \quad (34).$$

Da die Reihe gut konvergiert, ist die Gl. (34) zur Berechnung des Potentials brauchbar.

Für Bezugspunkte, die senkrecht unter der Oberleitung, also in der Erde, liegen, erhält man aus Gl. (16 b) mit $\chi = \xi = \delta = 0$

$$q_2 = -4\int_0^\infty e^{\beta\eta}(\beta - \alpha)\,d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Hierin ist $\beta^2 = \alpha^2 + j$. Führt man β als Unabhängige ein, so ergibt sich mit $\alpha = \sqrt{\beta^2 - j}$ und $\alpha\,d\alpha = \beta\,d\beta$

$$q^2 = -4\int_{\sqrt{j}}^\infty e^{\beta\eta}\left(\sqrt{\beta^2 - j} + \frac{j}{\sqrt{\beta^2 - j}} - \beta\right)d\beta \quad . \quad . \quad (35\,\text{a}).$$

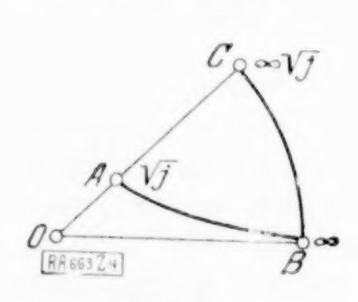


Abb. 4.
Integrationswege für Gl. 35 a.

Das Integral ist über den gekrümmten Weg AB (Abb. 4) zu erstrecken. Statt dessen kann man nach dem Cauchyschen Integralsatz auch den gebrochenen Weg ACB nehmen, da zwischen beiden Wegen keine Diskontinuität liegt. Beachtet man, daß das Integral über CB verschwindet und ersetzt η durch $-\eta$, rechnet also die Ordinaten in der Erde positiv, und β durch $-\beta\sqrt{j}$, so erhält man

$$q_2 = 4j\int_{-1}^\infty e^{j\beta\eta\sqrt{-j}}\left(j\sqrt{1-\beta^2} - \frac{j}{\sqrt{1-\beta^2}} + \beta\right)d\beta.$$

Nun ist[1])

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{H_1^2(\eta\sqrt{-j})}{\eta\sqrt{-j}} = \int_{-1}^\infty e^{j\beta\eta\sqrt{-j}}\sqrt{1-\beta^2}\,d\beta$$

und

$$\frac{\pi}{2}\,H_0^2(\eta\sqrt{-j}) = \int_{-1}^\infty e^{j\beta\eta\sqrt{-j}}(1-\beta^2)^{-1/2}\,d\beta.$$

Daher ergibt sich

$$q_2 = 2\pi\left[\frac{H_1^2(\eta\sqrt{-j})}{\eta\sqrt{-j}} - H_0^2(\eta\sqrt{-j})\right] + 4\,e^{-\eta\sqrt{j}}\left(\frac{\sqrt{j}}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}\right) \quad . \quad . \quad (36).$$

Durch Gl. (36) ist ein geschlossener Ausdruck für das Potential in der Erde unterhalb der Leitung gewonnen.

---

[1]) Jahnke-Emde, a. a. O. S. 170.

[2]) Laska, a. a. O. S. 238.

Die Gleichungen (28), (32), (34) und (36) ergeben ein deutliches Bild von dem Verlauf des Potentials in der ganzen Ebene, wenn die Leitungshöhe gleich Null ist. Da die Höhe der Leitung nur in ihrer näheren Umgebung den Wert des Potentials merklich beeinflußt, haben die Gleichungen in genügender Entfernung von der Leitung allgemeine Geltung. In den Abbildungen 5 und 6 ist das Potential für die Erdoberfläche und für die lotrechte Ebene, welche durch die Oberleitung geht, zeichnerisch dargestellt. Als Längeneinheit ist die Eindringungstiefe gewählt. Die Abb. 5 zeigt das Potential beim Höchstwert des Leitungsstromes, die Abb. 6 für den Leitungsstrom Null.

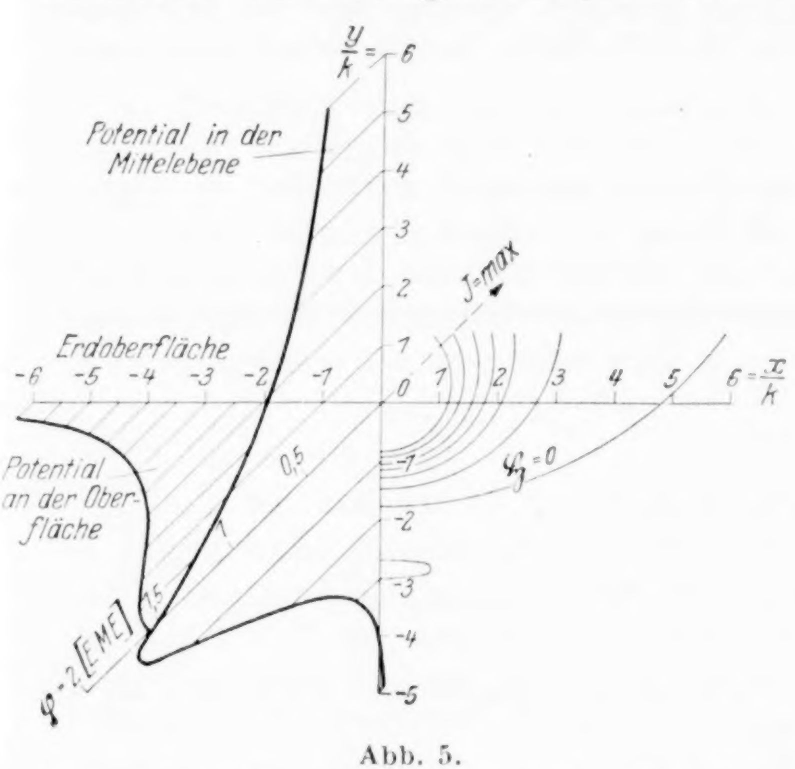


Abb. 5.

Verlauf des Potentials (links) und ungefähre Form der magnetischen Kraftlinien (rechts) für den Maximalwert des Leitungsstroms. Die Potentialwerte stellen in anderem Maßstab auch die elektrische Feldstärke und den Erdstrom dar.

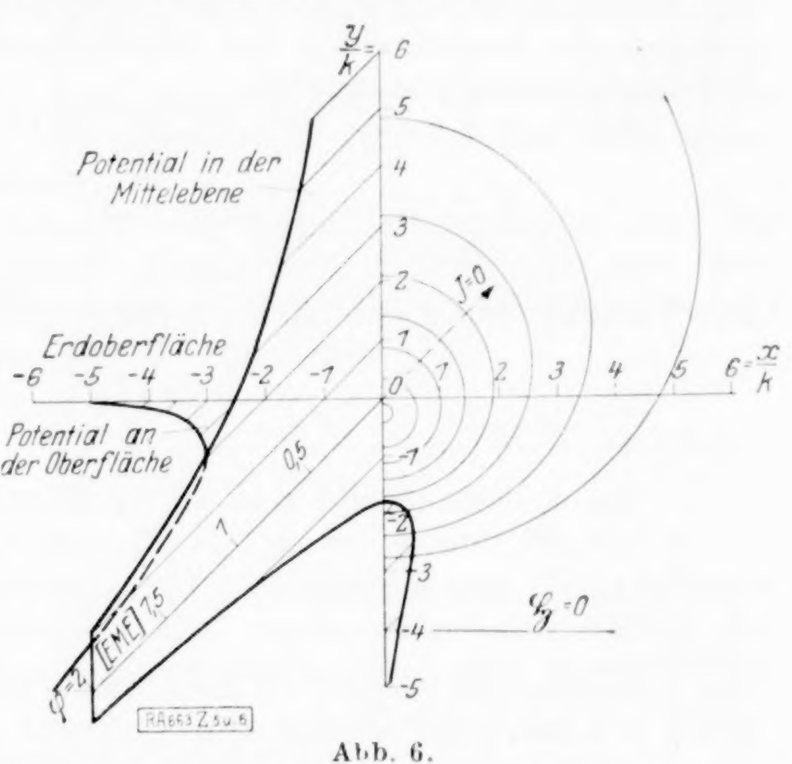


Abb. 6.

Darstellung derselben Größen wie in Abb. 5, aber für den Leitungsstrom Null.

Das Potential in der Erde ergibt mit $\frac{J\omega}{\varrho}$ multipliziert die Stromdichte in der Erde. Diese wird also in passendem Maßstab ebenfalls durch das Diagramm für das Potential wiedergegeben.

Die Aequipotentiallinien stellen, wie aus den Gleichungen (6) zu ersehen ist, die magnetischen Kraftlinien dar. Doch ist die magnetische Feldstärke gegen das Potential um 90^0 verschoben. Um die magnetischen Kraftlinien auch der Phase nach richtig wiederzugeben, enthält Abb. 5 die Aequipotentiallinien der Abb. 6 und umgekehrt.

Für die Praxis von besonderer Bedeutung ist die Spannung, welche von dem Leitungsstrom in einer parallelen Leitung hervorgerufen wird. Zur Berechnung dieser Spannung bedient man sich des Begriffs der **Fremdinduktivität für die Längeneinheit**, d. h. der Spannung, welche vom Leitungstsrom 1 bei der Kreisfrequenz 1 in der Längeneinheit induziert wird. Die Fremdinduktivität ist, wie auf S. 370 gezeigt ist, nichts anderes als das Potential. Im praktischen Maß, nämlich in Henry für das Kilometer, ergibt sich die Fremdinduktivität, indem man den Wert für das Potential mit 10^{-4} multipliziert.

Aus den Gleichungen (27), (29) und (31) erhält man nach Einführung des Begriffs der Eindringungstiefe

$$k = \sqrt{\frac{\varrho}{4\pi\omega}}$$

folgende Werte für die **Fremdinduktivität**.

Für die nähere Umgebung der Leitung (bis $a = 0{,}4\,k$)

$$\mathfrak{M} = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\,j \log\operatorname{nat}\frac{1{,}852\,k}{a}\right)\cdot 10^{-4}\ \mathrm{H/km} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Für weitere Entfernungen ($a_1 > 0{,}2\,k$)

$$\mathfrak{M} = -\left(2\,\pi\,k\,\frac{H_1^{2}\left(\frac{a_1}{k}\sqrt{-j}\right)}{a_1\sqrt{-j}} + \frac{4\,k^2}{a_1^{2}}\right)\cdot 10^{-4}\ \mathrm{H\ km} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Für große Abstände ($a > 6\,k$)

$$\mathfrak{M} = -\frac{4\,k^2}{a^2} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{H/km} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39).$$

Man findet die Fremdinduktivität in H/km auch aus Abb. 3 durch Multiplikation mit 10^{-4}.

4. Berücksichtigung der leitenden Oberflächenschicht. Die Behandlung der Aufgabe wird umständlicher, wenn man die leitende Oberflächenschicht berücksichtigt. Da der Einfluß dieser Schicht nur eine Korrektur darstellt, wird der allgemeine Verlauf des Potentials durch diese Schicht nicht wesentlich geändert werden, und es soll daher lediglich die Beeinflussung des Potentials an der Erdoberfläche wegen seiner praktischen Bedeutung untersucht werden.

Für $\eta = 0$ erhält man aus Gl. (16a)

$$\varphi = -4\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\chi}\cos\alpha\xi\,(\beta-\alpha)\,d\alpha}{1+\delta(\beta-\alpha)} \quad \ldots \ldots \ldots (40).$$

Das Potential für $\delta = 0$ ist im vorigen Abschnitt behandelt worden und beträgt

$$\varphi_0 = -4\int_0^\infty e^{-\alpha\chi}\cos(\alpha\xi)\,(\beta-\alpha)\,d\alpha.$$

Die Korrektur, die man zu φ_0 hinzufügen muß, um φ zu erhalten, ist

$$c = \varphi - \varphi_0 = -4\int_0^\infty e^{-\alpha\chi}\cos\alpha\xi\,(\beta-\alpha)\,d\alpha\left[\frac{1}{1+\delta(\beta-\alpha)} - 1\right] \quad \ldots (41).$$

Die Korrektur konvergiert in der Nähe der Oberleitung gegen den Wert, den sie für $\chi = \xi = 0$ hat. Sie beträgt also an dieser Stelle

$$c = 4\,\delta\int_0^\infty \frac{(\beta-\alpha)^2}{1+\delta(\beta-\alpha)}\,d\alpha,$$

wobei $\beta = \sqrt{\alpha^2 + j}$ ist.

Erstreckt man das Integral über den gebrochenen Weg $0, \infty\sqrt{j}, \infty$ und berücksichtigt, daß zwischen den beiden Integrationswegen kein Diskontinuitätspunkt liegt und daß das Integral im Unendlichen verschwindet, so erhält man nach dem Cauchyschen Integralsatz, wenn man $\alpha\sqrt{j}$ statt α und z statt $\delta\sqrt{j}$ einführt,

$$c = 4\,j\,z\int_0^\infty \frac{(\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha)^2\,d\alpha}{1+z(\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha)}.$$

Dies Integral läßt sich elementar bestimmen und ergibt

$$c = j\left[1 - \frac{2}{z} + \frac{2(1+z^2)}{z^2}\log\mathrm{nat}(1+z)\right] \quad \ldots \ldots (42).$$

Setzt man schließlich $z = \delta\sqrt{j}$ und trennt den reellen Anteil vom imaginären, so folgt

$$c = -\frac{\sqrt{2}}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\log\mathrm{nat}(1+\delta\sqrt{2}+\delta^2) - 2\,\mathrm{arctg}\frac{\delta}{\delta+\sqrt{2}}$$

$$+ j\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\delta} + \log\mathrm{nat}(1+\delta\sqrt{2}+\delta^2) + \frac{2}{\delta^2}\,\mathrm{arctg}\frac{\delta}{\delta+\sqrt{2}}\right] \quad \ldots (42\,a).$$

Ist der Einfluß der Oberflächenschicht gering, d. h. ist δ klein, so wird

$$c = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\delta\,(-1+j)$$

und das Potential in der Nähe der Leitung

$$\varphi = \varphi_0 + c = -\frac{\pi}{2} - 2\,j\log\mathrm{nat}\frac{1{,}852}{\sigma} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\delta\,(-1+j) \quad \ldots (43).$$

Die phasengleiche Komponente des Potentials bekommt also durch den Einfluß der Oberflächenschicht einen größeren Zahlenwert, die verschobene einen kleineren.

Ist die Leitfähigkeit der Oberflächenschicht sehr groß im Vergleich zur Leitfähigkeit des Erdbodens, so erhält man bei Vernachlässigung der Größen kleinerer Ordnung

$$c = -\frac{\pi}{2} + j\,(2 \log \text{nat}\, \delta + 1).$$

Daraus folgt für das Potential in der Nähe der Oberleitung bei sehr großem δ

$$\varphi = \varphi_0 + c = -\frac{\pi}{2} - 2j \log \text{nat} \frac{1{,}852}{\sigma} - \frac{\pi}{2} + j\,(2 \log \text{nat}\, \delta + 1)$$

$$= -\pi + j\left[2 \log \text{nat}\left(\frac{a\,d}{1{,}852\,k^2}\right) + 1\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44).$$

Den Fall, daß nur die Oberfläche der Erde merklich leitet, hat O. Mayr direkt behandelt; er ergibt sich hier als Sonderfall der allgemeinen Aufgabe und führt naturgemäß zu demselben Ergebnis, das Mayr erhalten hat[1]).

Für Bezugspunkte in großem Abstand von der Leitung erhält man für das Potential eine semikonvergente Entwickelung. Formt man die Gl. (40) nach dem Cauchyschen Integralsatz in der gleichen Weise um, wie es bei den Gleichungen (22) und (23) gezeigt ist, und setzt noch $\chi = 0$ und $z = \delta\sqrt{j}$, so ergibt sich

$$\varphi = 2\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\sqrt{j}\,\xi}\,(\sqrt{1-\alpha^2} - j\,\alpha)\,d\alpha}{1 + z\,(\sqrt{1-\alpha^2} - j\,\alpha)} - 2\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\sqrt{j}\,\xi}\,(\pm\sqrt{1-\alpha^2} + j\,\alpha)\,d\alpha}{1 + z\,(\pm\sqrt{1-\alpha^2} + j\,\alpha)} \quad . \quad (45).$$

In dem zweiten Integral gilt das obere Vorzeichen für $\alpha < 1$, das untere für $\alpha > 1$.

Die Integranden in der Gl. (45) haben für große Entfernungen des Bezugspunktes nur in der Nähe von $\alpha = 0$ merkliche Größe. Man kann daher den Faktor der Exponentialfunktion nach Potenzen von α entwickeln und erhält, wenn man kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt,

$$\varphi = -4j\int_0^\infty e^{-\alpha\sqrt{j}\,\xi} \cdot \frac{\alpha\,d\alpha}{(1+z)^2}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt, wenn man wieder $z = \delta\sqrt{j}$ setzt,

$$\varphi = -\frac{4}{\xi^2\,(1 + \delta\sqrt{j})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46).$$

Der absolute Wert des Potentials in großem Abstand ist somit

$$\varphi = \frac{4}{\xi^2\,(1 + \delta\sqrt{2} + \delta^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47).$$

Das Potential wird also durch die Oberflächenschicht verringert, und es tritt nach Gl. (46) eine Phasenverschiebung ein. Bei großer ideeller Stärke der Oberflächenschicht überwiegt die imaginäre Komponente.

Bei mittlerem Abstand des Bezugspunktes von der Leitung gelingt es nicht, einen einfachen Ausdruck für das Potential zu finden. Da aber der Integrand der Gl. (40) innerhalb des Kreises $[\delta] < 1$ keine Unstetigkeit besitzt, kann man das Integral in eine Reihe nach Potenzen von δ entwickeln, die für $\delta < 1$ konvergiert. Setzt man

$$\varphi = A_0 + A_1\,\delta + A_2\,\frac{\delta^2}{2\,!} + \ldots A_n\,\frac{\delta^n}{n\,!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48),$$

so ist nach dem Taylorschen Satz $A_0 = \varphi_0$ das Potential und A_n die n te Ableitung des Potentials nach δ für $\delta = 0$.

Es ergibt sich aus Gl. (16a) für $\eta = 0$

$$A_1 = \left(\frac{d\varphi}{d\delta}\right)_{\delta=0} = 4\int_0^\infty e^{-\alpha\chi} \cos(\alpha\,\xi)\,(\beta - \alpha)^2\,d\alpha$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-\alpha\chi} \cos(\alpha\,\xi)\,(j + 2\,\alpha^2 - 2\,\alpha\sqrt{\alpha^2 + j})\,d\alpha \quad . \quad . \quad (49).$$

[1]) a. a. O. S. 1354.

Die beiden ersten Teilintegrale verschwinden für $\chi = 0$, das dritte ist gleich $-2\frac{d\varphi_0}{d\chi}$. Man erhält, wenn man $\frac{d\varphi_0}{d\zeta}$ aus Gl. (29) und (30) bildet, und zur Grenze $\zeta = 0$ übergeht,

$$A_1 = -8\sqrt{-j}\int_0^1 e^{-\sqrt{j}\,\xi\alpha}\cdot\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\,d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Man kann von diesem Integral noch eine **Besselsche** Funktion abspalten. Für die praktische Rechnung ist es aber bequemer, die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe zu entwickeln und dann zu integrieren[1]). Es ergibt sich

$$A_1 = -8\sqrt{-j}\left(1 + j\frac{\xi^2}{1^2\cdot 3\cdot 5} - \frac{\xi^4}{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} - + + \ldots\right)$$
$$+ 4\pi\left(\frac{\xi}{2\cdot 4} + j\frac{\xi^3}{2^2\cdot 4\cdot 6} - \frac{\xi^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6\cdot 8} - + + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50\,\mathbf{a}).$$

Der zweite Koeffizient der Entwickelung ist nach Gl. (40)

$$A_2 = \left(\frac{d^2\varphi_0}{d\delta^2}\right)_{\delta=0} = -8\int_0^\infty e^{-\alpha\chi}\cos\alpha\,\xi\,(\beta-\alpha)^3\,d\alpha$$

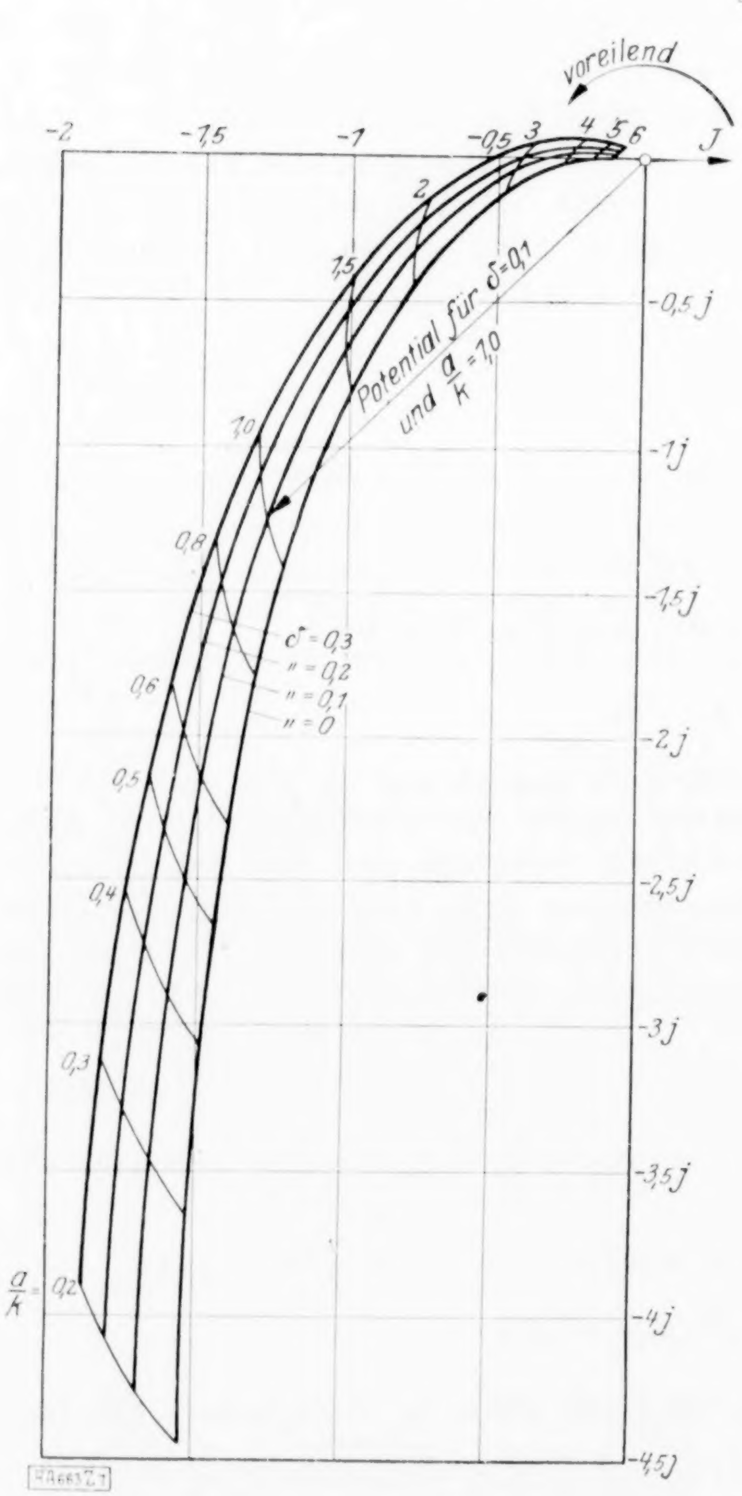


Abb. 7 (links).
Größe und Phase des Potentials je nach der ideellen Stärke der Oberflächenschicht und der Lage des Bezugspunktes.

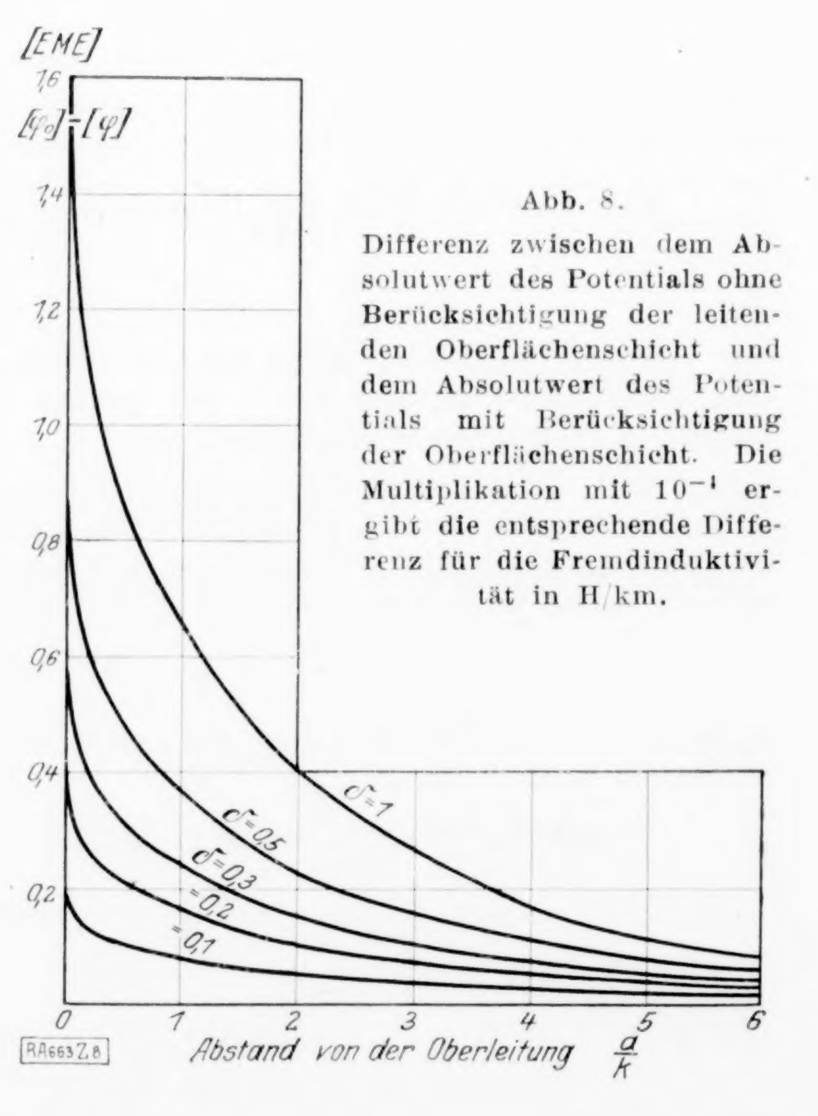


Abb. 8.
Differenz zwischen dem Absolutwert des Potentials ohne Berücksichtigung der leitenden Oberflächenschicht und dem Absolutwert des Potentials mit Berücksichtigung der Oberflächenschicht. Die Multiplikation mit 10^{-4} ergibt die entsprechende Differenz für die Fremdinduktivität in H/km.

[1]) Laska, a. a. O. S. 238.

oder

$$A_2 = -8 \int_0^\infty e^{-\alpha \zeta} \cos \alpha \xi \left[-3 \alpha j - 4 \alpha^3 + (j + 4 \alpha^2) \sqrt{\alpha^2 + j}\right] d\alpha \quad . \quad (51).$$

Die beiden ersten Teilintegrale lassen sich elementar bestimmen. Das dritte ist nach Gl. (22) und (23) gleich $2 j (u_3 + u_4)$ und das vierte $- 8 \frac{d^2 (u^3 + u^4)}{d \xi^2}$. Für $\zeta = 0$ ist nach Gl. (24 a)

$$u_3 + u_4 = -2 \pi \frac{H_1{}^2 (\xi \sqrt{-j})}{\xi \sqrt{-j}}$$

und hieraus[1])

$$\frac{d^2 (u^3 + u^4)}{d \xi^2} = 2 \pi j \left[\frac{H_1{}^2 (\xi \sqrt{-j})}{\xi \sqrt{-j}} \left(\frac{6 j}{\xi^4} - 1\right) - 3 j \frac{H_0{}^2 (\xi \sqrt{-j})}{\xi^2}\right].$$

Hiermit ergibt sich

$$A_2 = -\frac{24 j}{\xi^2} + \frac{192}{\xi^4} + 12 \pi \left[\frac{H_1{}^2 (\xi \sqrt{-j})}{\xi \sqrt{-j}} \left(\frac{6}{\xi^2} + j\right) - \frac{4 H_0 (\xi \sqrt{-j})}{\xi^2}\right] \quad . \quad . \quad (52).$$

Man kann in gleicher Art weitere Koeffizienten der Reihe (48) berechnen. Doch ist das hier unterlassen, da man die Reihe mit der zweiten Potenz abbrechen kann, wenn $\delta < 0{,}3$ ist, was in praktischen Fällen meist zutrifft. Ist es ausnahmsweise nötig, den Wert des Potentials für größere Werte von δ zu bestimmen, so ist es am besten, das Integral (40) mechanisch zu integrieren.

Das Potential ist für mehrere Werte der ideellen Schichtstärke und verschiedene Abstände des Bezugspunktes von der Leitung berechnet. Die Abb. 7 stellt die Ergebnisse der Rechnung in der Gaußschen Zahlenebene maßstäblich dar. Man ersieht, daß durch die leitende Oberflächenschicht der absolute Wert des Potentials vermindert und sein Phasenwinkel gegenüber dem Leitungsstrom J verkleinert wird.

Besonders wichtig ist das Maß, um welches das Potential durch die Oberflächenschicht verringert wird. Die Differenz der absoluten Potentiale

$$\Delta = [\varphi_0] - [\varphi]$$

ist daher nach Gl. (48) berechnet und in Abb. 8 als Funktion des Abstandes von der Leitung aufgetragen. Die Werte für $\delta = 0{,}5$ und $\delta = 1$ sind durch mechanische Quadratur gefunden.

Die Abb. 3 ergibt den absoluten Wert des Potentials ohne Berücksichtigung der Oberflächenschicht und die Abb. 8 die Korrektur für die Oberflächenschicht. Die Fremdinduktivität in Henry für das Kilometer ist gleich der Differenz der beiden Werte multipliziert mit 10^{-4}. 663

Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie.

Von **FRITZ REHBOCK** in Berlin.

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin).[2])

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, die Verfahren der darstellenden Geometrie durch einen einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen und zu erweitern. Gerade in neuerer Zeit zeigt das Erscheinen verschiedener, der gleichen Aufgabe gewidmeter Arbeiten, daß das Interesse an einer tieferen, theoretischen Begründung der darstellenden Geometrie wieder lebhaft geworden ist. Im Jahre 1912 hat Emil Müller in einem Vortrag[3]) die fruchtbare Anregung gegeben, aus der überkommenen Methodik dieser

[1]) Jahnke-Emde, a. a. O. S. 165.

[2]) Erster Teil einer von der philosophischen Fakultät der Universität Berlin angenommenen Dr.-Dissertation. Referenten: Prof. Dr. v. Mises und Prof. Dr. Bieberbach.

[3]) E. Müller, »Das Abbildungsprinzip«, Jhrsb. Dtsch. Math. Ver. 22 (1913), S. 44 bis 59. — In dem Encyklopädie-Artikel von E. Papperitz »Darstellende Geometrie« (Encykl. d. math. Wiss. III, 1, S. 517 ff.) wird der Hauptwert auf die technische Herstellung der »Risse«, nicht aber auf irgend einen allgemeinen Abbildungsgedanken gelegt.

Wissenschaft hinauszugehen und den allgemeinen Abbildungsbegriff der Geometrie auch der darstellenden Geometrie zu Grunde zu legen. In der Tat handelt es sich ja im einfachsten Fall des Grund-Aufrißverfahrens um die Verbindung von zwei singulären linearen Abbildungen des Punktraumes. Auf diesem Gedanken baut sich das umfangreiche und überaus wertvolle Buch »Die linearen Abbildungen« von Müller und Kruppa[1]) auf. Einen Bericht über dieses Buch hat Kruppa kürzlich in einer Arbeit »Ueber neuere Fortschritte der darstellenden Geometrie«[2]) gegeben, die auch Angaben über Literatur und die Forschungsarbeiten der Wiener Schule enthält.

Von dem Müller-Kruppaschen Buche unterscheidet sich die hier gebotene Arbeit in zwei Richtungen. Einmal soll sie zeigen — und das geschieht im ersten Kapitel — daß die übliche, von Monge begründete darstellende Geometrie die Durchdringung zweier zueinander dualer Abbildungsprinzipien ist. Sie bestehen darin, daß man einmal den Punkt, einmal die Ebene als das Element des Raumes betrachtet und den Raumpunkt durch ein Punktpaar, die Raumebene durch ein Strahlenpaar der Bildebene linear abbildet, woraus zwei gleichberechtigte — innerhalb der ebenen Geometrie duale — Abbildungen der Raumgeraden durch Projektionspaare bzw. Spurpunktspaare hervorgehen. Diese Gesamtauffassung der Elementarmethoden der darstellenden Geometrie, die den Vorlesungen meines Lehrers Hrn. v. Mises zugrunde lag[3]), kommt in dem Müller-Kruppaschen Buch nicht zum Ausdruck bei der dort gewählten Dreiteilung der Abbildungsmethoden in »Zweispurenprinzip, Zweibilderprinzip und achsonometrisches Prinzip«. Das Zweibilderprinzip ist eine lineare Abbildung des Punktraumes. Dagegen wird in jenem Buch für die Herleitung des »Zweispurenprinzips« der Raumstrahl als Ausgangselement gewählt, was keineswegs zweckmäßig ist und die Korrespondenz des räumlichen Dualitätsprinzips mit dem des Bildgebiets verwischt. Bei unserer allgemeinen Auffassung kann dann ferner das von Kruppa als »achsonometrisches Prinzip« aufgestellte Abbildungssystem nicht als ein besonderes Prinzip gelten.

Wird aber der Strahl als Grundelement einer darstellenden Geometrie angesehen, so kommt man — und darin besteht der zweite Unterschied — zu einem umfassenderen, in jenem Buch nicht behandelten Abbildungs-Typus, den inzwischen Eckhart in einer analytischen Arbeit[4]) angedeutet hat und dem die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit in der Hauptsache gelten. Im 2. und 3. Kapitel wird diese lineare Abbildung des Strahlenraumes auf Elemente der Ebene synthetisch und analytisch ausgeführt. Das Abbildungsmittel — der Ausdruck stammt von Eckhart — ist eine »projizierende Regelschar« 2. Ordnung. Da durch einen Strahlenriß der Strahlenraum so wenig »dargestellt« werden kann, wie der Punktraum durch einen Punktriß, so entsteht endlich die Frage, wie man durch Verbindung mehrerer allgemeiner Strahlenabbildungen, analog dem Verfahren zugeordneter Risse in den Elementarmethoden, Eineindeutigkeit erzielt.

In einem zweiten Teil, der sich an diese Untersuchungen anschließt, soll die Aufgabe behandelt werden, diejenigen »Fundamentalelemente« im Bildgebiet zu ermitteln, die zur Lösung projektiver Raumaufgaben mittels eines Systems von Strahlenrissen erforderlich sind.

1. Kapitel: Die allgemeine Problemstellung und die Abbildung des Punkt-Ebenen-Raumes.

1. Definitionen. 1. Fassen wir im dreidimensionalen Raum den Punkt als bestimmendes Element, die Gerade also als Punktreihe, die Ebene als Punktfeld auf, so möge dieser Raum kurz als der »p-Raum« bezeichnet werden. Die im Sinne der projektiven Geometrie duale Betrachtung liefert den »ε-Raum«, in dem die Ebene als Element, mithin die Gerade als Ebenenbüschel, der Punkt als Ebenenbündel angesehen wird. Von Plücker endlich stammt die dritte mögliche Behandlungsweise, nämlich den Strahl als Grundelement zu betrachten. Dieser G-Raum unterscheidet sich, abgesehen von der Dimensions-

[1]) E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie. I. Band: Die linearen Abbildungen, bearbeitet von E. Kruppa (Wien 1923).

[2]) E. Kruppa, Ueber neuere Fortschritte der darstellenden Geometrie (diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 411 ff.).

[3]) Für Ratschläge, Anregungen und Förderung beim Anfertigen der Arbeit bin ich meinem Lehrer Herrn v. Mises zu großem Dank verpflichtet.

[4]) L. Eckhart, Ueber die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie (aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, 1923, Math. naturw. Kl., Abt. IIa, 132. Bd., 5. und 6. Heft).

zahl, dadurch von den beiden anderen Räumen, daß nicht irgend zwei seiner Elemente ein Gebilde erster Stufe, ein Büschel, bestimmen, sondern nur zwei besondere, nämlich sich schneidende Elemente. Strahlenbündel und Strahlenfeld sind die zueinander dualen elementaren Gebilde zweiter Stufe dieses Raumes.

Die übliche darstellende Geometrie pflegt von den Objekten eines jeden dieser Räume auf verschiedenste Weise eineindeutige »Bilder« zu entwerfen. Um diese Abbildungsmethoden zu erforschen, legen wir durch eine erste Definition den Typus einer »allgemeinen linearen[1]) Abbildung« fest, die auf Eineindeutigkeit noch keinen Anspruch erhebt, und umgrenzen dann durch eine zweite Definition das Arbeitsgebiet einer darstellenden, konstruktive Zwecke verfolgenden Geometrie.

1. Definition: Eine »allgemeine lineare Abbildung« des p-Raumes, ε-Raumes oder G-Raumes sei eine Abbildung der Elemente des betreffenden Raumes auf die Grundelemente eines beliebigen Gebildes zweiter Stufe π, also auf die Punkte oder die Strahlen eines Feldes, die Ebenen oder die Strahlen eines Bündels. Eine solche Abbildung, die wir auch kurz je nach dem gewählten Raum als p-Riß, ε-Riß oder G-Riß bezeichnen, soll den folgenden Forderungen genügen:

I. Jedem Element des Raumes sei mindestens ein Bildelement in π zugeordnet. Diejenigen Raumelemente, die mehrere Bilder erhalten, sollen als singulär, ihre Gesamtheit als singuläres Gebilde bezeichnet werden. Doch soll jedes Element in π Bild mindestens eines nicht-singulären Raumelementes sein.

II. Die Abbildung sei linear in folgendem Sinne:

a) Haben zwei Raumelemente A und B eines Gebildes erster Stufe unter anderen die nicht zusammenfallenden Bilder A' und B', so soll jedes Element des Gebildes AB mindestens ein Element des Büschels bzw. der Reihe $A'B'$ zum Bilde und jedes Element von $A'B'$ mindestens ein Element von AB zum Original haben.

b) Fallen jedoch die Bilder A' und B' zusammen, so soll jedes Element des von AB bestimmten Gebildes erster Stufe mindestens in $A' = B'$ abgebildet werden. Und haben umgekehrt zwei verschiedene Bilder A' und B' unter anderen dasselbe (also singuläre) Raumelement zum Original, so soll jedes Element des Bildbüschels bzw. der Bildreihe $A'B'$ mindestens Bild jenes singulären Elementes sein. Diese letzte Festsetzung besagt also, daß ein singuläres Element mindestens die Elemente eines Büschels bzw. einer Reihe zu Bildern hat.

2. Definition: Unter einer darstellenden Geometrie werde verstanden die Untersuchung geometrischer Probleme eines p-Raumes, ε-Raumes oder G-Raumes mittels eines eineindeutigen Systems linearer Risse, und zwar ohne Zuhilfenahme räumlicher Konstruktionen, lediglich durch Verwendung gewisser, noch näher zu bestimmender Fundamentalelemente in den Bildgebieten.

2. Es sei bereits an dieser Stelle auf einen Zusammenhang zwischen den drei Abbildungsmöglichkeiten hingewiesen, auf den später genauer eingegangen wird. Wir betrachten einen p-Riß im Punktfeld π. Bevor die Struktur einer solchen allgemeinen Abbildung bekannt ist, läßt sich durch einfache Ueberlegungen — wie sie im nächsten Paragraphen durchgeführt werden — erkennen, daß jeder Punktreihe wieder eine oder mehrere Geraden als Bild zugeordnet werden, d. h. jedem »Raumstrahl« das zum Bildelement des Punktes innerhalb des Bildgebietes duale Element. Man kann ferner nachprüfen, daß diese mit der p-Abbildung verknüpfte Abbildung des G-Raumes unseren Grundforderungen genügt, also als ein G-Riß anzusehen ist. Es gilt also der

Satz 1. Jeder allgemeine p-Riß oder ε-Riß kann als ein spezieller G-Riß gedeutet werden.

Wir brauchten daher eigentlich für die p- und ε-Abbildungen keine besonderen Untersuchungen anzustellen. Sind wir imstande, die Abbildungen des Strahlenraumes in allgemeinster Form zu erkennen, so haben wir als spezielle Typen auch die p- und ε-Risse gefunden. Trotzdem soll aus systematischen Gründen in den folgenden beiden Paragraphen zunächst p- und ε-Raum selbständig untersucht werden.

[1]) Eine nicht-lineare Abbildung behandelt im Anschluß an ein von J. Steiner gestelltes Problem die Jenaer Dissertation von W. Kramer: »Ueber ein besonderes geometrisches Abbildungsverfahren«. (Weida i. Th., 1921).

3. Eine spezielle Abbildung der verlangten Art entsteht für den ε-Raum, wenn man jeder Ebene ε ihre Schnittgerade E_0 mit einem Strahlenfeld π zuordnet, für den G-Raum, wenn der Strahl seinen Schnittpunkt g_0 mit dem Punktfeld π als Bild erhält. Dual dazu können wir den Punkten des p-Raumes die mit ihnen vereinigten Strahlen P^0, den Strahlen des G-Raumes die mit ihnen vereinigten Ebenen γ^0 eines Bündels zuordnen. Solche Abbildungen sollen durch den gemeinsamen Namen »Nullriß« bezeichnet werden, wobei man daran denken kann, daß der Abstand bzw. der Winkel zwischen Original und Bild gleich Null ist.

3. Definition: Unter einem »Nullriß« werde verstanden eine allgemeine lineare Abbildung, bei der jedes Raumelement mit seinem Bilde vereinigt liegt.

4. Definition: Abbildungen, bei denen Raum- und Bildelemente gleichnamig sind und bei denen die Bildelemente, als Raumelemente aufgefaßt, sich selbst entsprechen, sollen als »Hauptabbildungen« bezeichnet werden. So ist z. B. der »Grundriß« des p-Raumes eine Hauptabbildung.

2. Die Struktur des p- und ε-Risses. 1. Um zu untersuchen, wie die allgemeinsten, den Grundforderungen genügenden Abbildungen des p- und ε-Raumes aussehen, beweisen wir zwei Hilfssätze.

1. Hilfssatz: Enthält ein Raumgebilde erster Stufe ein singuläres Element, so werden alle nicht-singulären Elemente desselben in ein einziges Bild abgebildet.

Haben umgekehrt zwei nicht-singuläre Elemente zusammenfallende Bilder, so enthält das von ihnen bestimmte Gebilde erster Stufe mindestens ein singuläres Element.

Wir legen beim Beweise die Abbildung des p-Raumes auf ein Punktfeld zugrunde. a' sei das Bild eines nicht-singulären Punktes a, während der singuläre Punkt m mindestens eine Punktreihe (m') zu Bildern hat.[1] Liegt a' nicht auf (m'), so muß nach Forderung IIa das Bild b' irgend eines nicht singulären Punktes b von am auf jeder der Reihen $a'm'$ liegen, also $= a'$ sein, w. z. b. w. Ist aber a' ein Punkt von (m'), so ist a' Bild der beiden verschiedenen Punkte a und m, also nach IIb auch Bild eines jeden Punktes von am.

Die Umkehrung folgt so: $a' = b'$ sei das Bild der beiden getrennten, nicht-singulären Punkte a und b, also auch Bild jedes Punktes auf ab. Ist $c' \neq a'$, so gehört dazu mindestens ein nicht singuläres Original $c \neq a$ und $\neq b$. Irgend ein Punkt d' auf $a'c'$, der von a' und c' verschieden ist, hat mindestens einen Punkt d_1 ($\neq a$ und $\neq c$) auf ac und mindestens einen Punkt d_2 ($\neq b$ und $\neq c$) auf bc zum Original, daher jeden Punkt von $d_1 d_2$, also auch den Schnittpunkt der Reihen ab und $d_1 d_2$. Dieser Punkt wurde aber auch anderseits in $a' = b'$ abgebildet, ist mithin ein singulärer Punkt von ab.

2. Hilfssatz: Es gibt im p- bzw. ε-Raum höchstens ein singuläres Element m bzw. μ in bezug auf eine allgemeine lineare Abbildung.

Angenommen, es gäbe im p-Raum zwei singuläre Elemente m_1 und m_2. m_1 hat nach IIb zu Bildern mindestens die Punkte einer Reihe (m_1'), m_2 die einer Reihe (m_2'). Sind diese Reihen nicht identisch, und ist a irgend ein Punkt auf $m_1 m_2$, so muß auf jeder durch irgend ein Bildpaar $m_1' m_2'$ bestimmten Geraden mindestens ein Bild a' von a liegen. Das ist nur möglich, wenn a, d. h. jeder Punkt von $m_1 m_2$ singulär ist. Fallen aber die Reihen (m_1') und (m_2') zusammen, so ist jeder Punkt dieser Reihe Bild von m_1 und m_2, d. h. Bild zweier verschiedener Originalpunkte, mithin nach IIb auch Bild von a. Es ist also stets jeder Punkt von $m_1 m_2$ singulär. Aus dem ersten Hilfssatz folgt weiter, daß dann die nicht-singulären Punkte eines $m_1 m_2$ enthaltenden Punktfeldes α in einen einzigen Punkt a', eines ebensolchen Feldes β in einen einzigen Punkt b' abgebildet werden, mithin irgend ein anderer nicht-singulärer Raumpunkt c in einen auf $a'b'$ gelegenen Punkt c'. Dann wäre aber nicht jeder Punkt von π Bild mindestens eines nicht-singulären Punktes, so daß die Annahme, es gäbe mehr als ein singuläres Element, falsch ist.

2. **Zurückführung auf eine Hauptabbildung.** Es sei π irgend ein Bildgebiet. Da der p-Raum nach dem 2. Hilfssatz höchstens einen singulären Punkt enthält, so gibt es gewiss ein Punktfeld σ ohne singulären Punkt, dessen Punktgesamtheit (s) daher ein-

[1]) Eine Gesamtheit von Elementen a werde durch (a) bezeichnet. Dagegen bedeuten eckige Klammern die Gesamtheit der Elemente, die den in den Klammern stehenden »Gebilden« gemeinsam sind; in der Strahlengeometrie sei etwa $[P, a]$ die Gesamtheit der Strahlen, die dem Komplex mit der Achse P und dem Bündel mit dem Zentrum a angehören.

deutig abgebildet wird. Nach dem ersten Hilfssatz müssen irgend zwei σ-Punkte getrennte Bilder besitzen, und daraus wieder folgt, daß auch jedes Element s' in π unter anderen Raumpunkten stets einen und nur einen σ-Punkt zum Original hat. Es besteht also zwischen dem Felde $\sigma = (s)$ und seinem Bildgebiet (s') eine nicht-ausgeartete Kollineation $\mathfrak{K}(s') = (s)$ [1]. Wir stellen nun eine neue, den Grundforderungen genügende Abbildung des p-Raumes auf das Punktfeld σ her, indem wir jedem Raumpunkt p denjenigen σ-Punkt zuordnen, der bei der früheren Abbildung dasselbe Bild p' hatte, wie p, also den Punkt $p^* = \mathfrak{K}p'$. Bei dieser neuen Abbildung entsprechen sich die Raumpunkte von σ selbst, sie ist also eine Hauptabbildung:

Satz 2: Jeder allgemeine p- oder ε-Riß kann auf vielfache Weise durch eine nicht-ausgeartete Kollineation oder Korrelation auf einen Hauptriß zurückgeführt werden.

War bei der Abbildung des p-Raumes das Bildgebiet π ein Punktfeld, so kann dieses selbst zum Felde der Hauptabbildung gewählt werden, wenn es keinen singulären Punkt enthält.

3. Zurückführung auf einen Nullriß. Es sei σ ein Hauptriß des p-Raumes. Ist p ein nicht-singulärer Punkt, p' sein Bildpunkt, so muß nach dem 1. Hilfssatz auf pp' mindestens ein singulärer Punkt m liegen, der nach dem 2. Hilfssatz der einzige singuläre Punkt in bezug auf die Abbildung ist. Das Bild p' entsteht mithin aus p durch »Zentralprojektion« vom m auf σ, d. h. also, indem man den Nullriß $P_m = mp$ mit σ schneidet.

Die duale Betrachtung liefert die Entstehung des Haupt-ε-Risses im Ebenenbündel s: Wir schneiden jede Ebene ε mit einer festen Ebene μ und verbinden den entstandenen Nullriß $E_\mu = \varepsilon\mu$ mit dem Zentrum s durch das »Hauptbild« ε_1. Dabei ist μ die einzige singuläre Ebene des ε-Raumes.

Aus Satz 2 folgt daher der

Satz 3: Jeder allgemeine lineare p- oder ε-Riß ist das kollineare Bild eines wohlbestimmten Nullrisses.

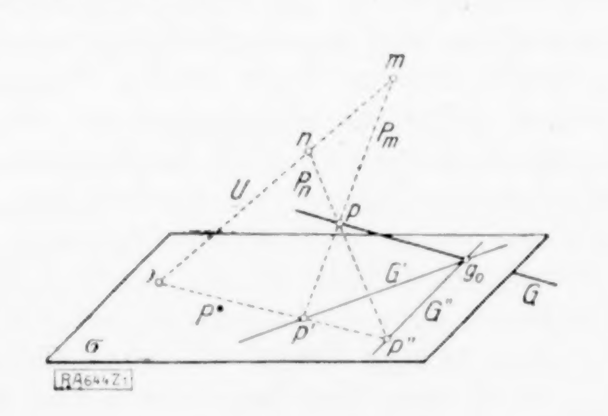
4. Um die Abbildung des p- bzw. ε-Raumes so weit wie möglich eineindeutig zu machen, verwenden wir zwei allgemeine p- bzw. ε-Risse, die wir aus praktischen Gründen im gleichen Bildgebiet annehmen. Wir beschränken uns zunächst auf Hauptabbildungen und stellen die Ergebnisse für den p- und ε-Raum dual nebeneinander.

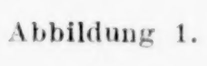
Es seien:

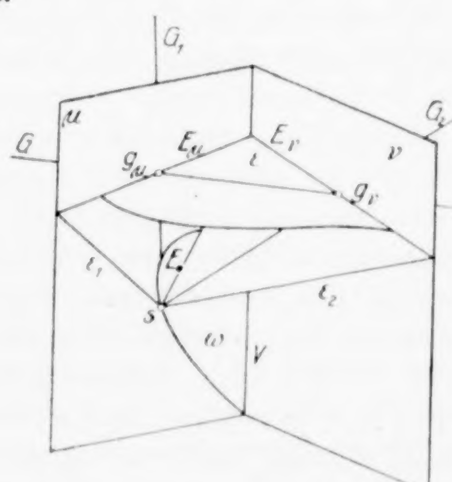
m und n die singulären Zentren, σ das Bildfeld, o der Nullriß von $U = mn$ in bezug auf σ, also der »erste« Riß von n oder der »zweite« Riß von m.	μ und ν die singulären Ebenen, s das Bildbündel, ω der Nullriß von $V = \mu\nu$ in bezug auf s, also der erste Riß von ν oder der zweite Riß von μ.

Aus der Abb. 1 liest man unmittelbar ab:

Ein nicht auf U liegender Punkt p wird abgebildet durch ein auf einem »Ordner« P^*, d. h. auf einem Strahl durch o liegendes Punktepaar p', p''.	Eine nicht durch V gehende Ebene ε wird abgebildet durch ein Ebenenpaar ε_1, ε_2 das in ω dieselbe Gerade E_*, den »Ordner«, ausschneidet.




Abbildung 1.



Für $p = m$ wird $p'' = o$, für $p = n$ aber $p' = o$, während der andere Riß jedesmal beliebig gewählt werden darf. Ein von m und n verschiedener U-Punkt hat das Bildpaar

[1]) Im folgenden stellt allgemein $\mathfrak{A}p = p'$ die Transformation eines Elementes p, $\mathfrak{A}(p) = (p')$ die Transformation einer Elementenmenge (p) dar.

$p' = p'' = o$. Nur bei Wahl eines von o bzw. ω verschiedenen Risses p' bzw. ε_1 ist also der zweite Riß auf eine lineare Mannigfaltigkeit beschränkt. Jedem dieser durch drei Skalare bestimmten Bildpaare ist nur ein Original zugeordnet, und nur dem Bildpaar $p' = p'' = o$ bzw. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega$ entspricht ein Gebilde erster Stufe von Originalelementen.

Eine m oder n nicht enthaltende Punktreihe G wird abgebildet in zwei zueinander perspektive Punktreihen G' und G'', deren Doppelelement der Punkt

$$g_0 = G\,\sigma,$$

d. h. der Nullriß von G in bezug auf σ ist.

Ein m oder n nicht enthaltendes Punktfeld $\alpha = (a)$ wird in zwei zueinander perspektive Punktfelder (a') und (a'') abgebildet. Das Zentrum der Perspektivität ist o, die Achse ist A_0, d. h. der Nullriß von α in bezug auf σ [1]).

Ein μ oder ν nicht enthaltendes Ebenenbüschel G wird abgebildet in zwei zueinander perspektive Ebenenbüschel G_1 und G_2, deren Doppelelement die Ebene

$$\gamma^0 = G\,s,$$

d. h. der Nullriß von G in bezug auf s ist.

Ein μ oder ν nicht enthaltendes Ebenenbündel $a = (\alpha)$ wird in zwei zueinander perspektive Ebenenbündel (α_1) und (α_2) abgebildet. Die Doppelebene ist ω, die Achse ist A^0, d. h. der Nullriß von a in bezug auf s.

Enthalten G, α oder a singuläre Elemente, so arten die perspektiven Verwandtschaften zwischen den Bildgebieten aus. Gehört G dem Bildgebiet an, so wird die Perspektivität zur Identität.

Den allgemeinen Typus der Abbildungen erhält man, wenn man jeden Riß kollinear transformiert. Lassen wir die Bildgebiete und die gewählten Bildelemente ungeändert, so ergeben sich etwa die neuen Risse

$$\bar{p}' = \mathfrak{K}'p', \quad \bar{p}'' = \mathfrak{K}''p'', \qquad \bar{\varepsilon}_1 = \mathfrak{K}_1\varepsilon_1, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \mathfrak{K}_2\varepsilon_2.$$

Ist $\mathfrak{K}' \neq \mathfrak{K}''$ (bzw. $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2$), so sind in diesem »projektiven Rißsystem« die Risse $\bar{p}'$ und $\bar{p}''$ (bzw. $\bar{\varepsilon}_1$ und $\bar{\varepsilon}_2$) an entsprechende Strahlen zweier projektiv aufeinander bezogenen »Ordnungsstrahlbüschel« mit den Zentren $\bar{o}' = \mathfrak{K}'o$ und $\bar{o}'' = \mathfrak{K}''o$ in σ (bzw. mit den Ebenen $\bar{\omega}_1 = \mathfrak{K}_1\omega$ und $\bar{\omega}_2 = \mathfrak{K}_2\omega$ in s) gebunden. Die Gebilde erster und zweiter Stufe werden jetzt nicht mehr durch perspektive, sondern durch spezielle projektive Verwandschaften abgebildet.

Ist jedoch $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}''$ oder $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$, so bleibt die Beziehung zwischen den Ordnungsstrahlbüscheln die Identität und die Bildsysteme der Gebilde erster und zweiter Stufe sind auch jetzt perspektiv verwandt. Darum erscheint hierfür die Bezeichnung, »perspektives Rißsystem« angebracht.

Wird der eine Hauptriß durch eine Kollineation, der andere durch eine Korrelation transformiert, so besteht das Bild des Raumelementes aus einem Paar dualer Elemente.

5. In einem System zweier Risse desselben Raumes lassen sich — wie in dem Müller-Kruppaschen Buch etwa bei Behandlung des Zweibilderprinzips ausführlich gezeigt wird — alle rein projektivenRaumaufgaben lösen, wenn die »Ordnungsgebilde« $\mathfrak{K}'o$ und $\mathfrak{K}''o$ (bzw. $\mathfrak{K}_1\omega$ und $\mathfrak{K}_2\omega$) sowie die zwischen ihnen bestehende projektive Zuordnung gegeben sind. In einem solchen System lassen sich die Risse der Geraden als Elemente auffassen, nämlich als die Elemente, die innerhalb des Bildgebietes dual sind zu den Bildelementen des gewählten Grundelements. Dagegen werden die Gebilde zweiter Stufe durch Verwandtschaften abgebildet, und daher werden etwa in einem p-System alle Aufgaben, die die Ebene betreffen, unbequemer zu lösen sein, als in einem ε-System. Für praktische Aufgaben ist es deshalb zweckmäßig, ein p-System mit einem ε-System zu verknüpfen, und zwar im gleichen Bildgebiet. Wählt man ein Bildfeld σ, so ist es ferner angebracht, das zwischen Punkten und Ebenen bestehende Dualitätsprinzip des Raumes auf das des Feldes zu übertragen, also das Bildelement des p-Raumes dual zu dem des ε-Raumes zu wählen. In der Tat koppelt die darstellende Geometrie fast stets zwei p-Risse mit zwei ε-Rissen, bei denen als Bild des Punktes der Punkt, als Bild der Ebene die Gerade gewählt wird, und erst diese Durchdringung zweier Systeme liefert die Möglichkeit fruchtbarer Konstruktionen.

Die p-Risse sind jetzt aber insofern vor den ε-Rissen ausgezeichnet, als für sie Hauptabbildungen möglich sind. Wenn wir nun im ε-Riß nicht mehr die direkten Vorteile einer Hauptabbildung ausnutzen können, so können wir doch zum mindesten, falls für den

[1]) Vergl. E. Müller-Kruppa, Die linearen Abbildungen, § 44.

p-Raum zwei Hauptrisse in σ vorliegen, für den ε-Raum zwei Risse in σ wählen, die durch Schnitt von σ mit zwei Haupt-ε-Rissen in einem Bündel s entstehen. Diese ε-Risse bilden ein perspektives System, bei dem das Ordnungsgebilde — dual zum p-Riß — eine Punktreihe $O = (e_*)$ ist, nämlich die Schnittgerade $\sigma\omega$ (Abb. 2).

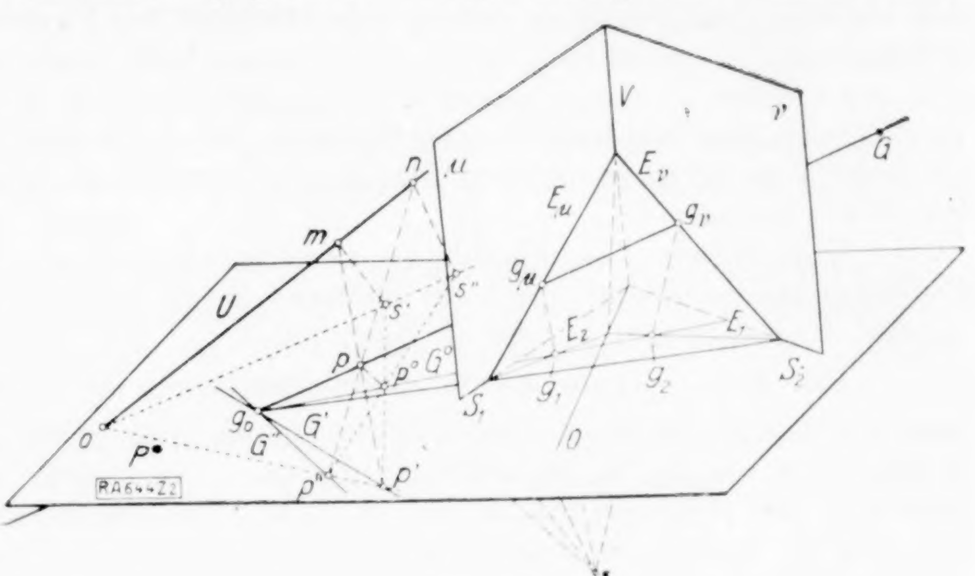


Abb. 2.

Im Abschnitt 4 dieses Paragraphen sahen wir, daß die Nullrisse in bezug auf σ oder s die Rolle der Doppelelemente in den Verwandtschaften spielen, durch die die Gebilde erster und zweiter Stufe abgebildet werden. In bezug auf s erhielt ein Bündel p den Nullriß $P^0 = ps$, eine Gerade G den Nullriß $\gamma^0 = Gs$. Schneiden wir auch diese Nullrisse mit σ, so erhalten sie als »Vertreter« in σ einen Punkt $p^0 = P^0\sigma$ bzw. eine Gerade $G^0 = \gamma^0\sigma$. Sie sollen kurz die »s-Nullrisse« heißen, zum Unterschied von den »σ-Nullrissen« E_0 und g_0 einer Ebene ε bzw. einer Geraden G. Es liegt stets g_0 mit G^0 vereinigt.

Diese Ergebnisse liefern die in der Tabelle dual nebeneinander gestellten Systeme:

Original	Haupt-p-Riß (Punktfeld σ)	σ-Nullriß	Perspektiver ε-Riß (Strahlenfeld σ)	s-Nullriß
p	p', p'' auf dem Ordner P^* durch o	—	Perspektivität zwischen zwei Strahlenfeldern. Achse 0; Zentrum:	p^0
G	Zwei perspektive Punktreihen G', G''; Doppelelement:	g_0	Zwei perspektive Strahlenbüschel g_1, g_2; Doppelelement:	G^0
ε	Perspektivität zwischen zwei Punktfeldern; Zentrum o, Achse:	E_0	E_1, E_2 durch den Ordner e_* auf 0	—

6. Es ist leicht, die singulären Elemente sowie die Kollineationen $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, bzw. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zu bestimmen für den Fall der »freien Perspektive«, des «Zweitafelsystems« oder der von v. Mises für Zwecke der graphischen Statik angegebenen Abbildung [1]) des p-Raumes, bei der im ersten Riß der Punkt, im zweiten Riß der Strahl als Bild des Raumpunktes gewählt wird. Hier soll nur noch die allgemeine Form einer Achsonometrie angedeutet werden.

Die Achsonometrie ist aus dem Bedürfnis entstanden, einen Zusammenhang zwischen Zeichnung und Berechnung eines Objektes zu gewinnen. Der p- oder ε-Raum wird in bekannter Weise einer zahlenmäßigen Behandlung im allgemeinsten projektiven Sinne zugänglich gemacht, indem man eine nicht-ausgeartete Kollineation zwischen den Elementen des gewählten Raumes und allen homogen aufgefaßten Zahlenquadrupeln herstellt. Dadurch werden jedem Element in bezug auf ein »Fundamentaltetraeder« und in bezug auf ein Einheitselement e (bzw. ε) vier projektive Koordinaten zugeordnet. Durch Projektion eines Punktes p mit den Koordinaten p_1, p_2, p_3, p_4 von einem Eckpunkt a ($a = 1, 2, 3, 4$) auf die gegenüberliegende Ebene α ($\alpha =$ I, II, III, IV) erhält man in dieser Ebene einen »Flächenpunkt« p^α (mit den Koordinaten $x_\alpha = 0$, $x_\beta = p_\beta$, $x_\gamma = p_\gamma$, $x_\delta = p_\delta$). Projiziert man diesen Punkt p^α von einer in der Ebene gelegenen Ecke auf die gegenüberliegende

[1]) R. v. Mises, Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme, Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 64 (1917), S. 209 bis 232. — E. Kruppa, Ueber die Misessche Abbildung räumlicher Kräftesysteme, diese Ztschr. Bd. 4 (1924), S. 146 ff.

Kante, also etwa von der Ecke β auf die Kante $\gamma\delta$, so erhält man einen »Kantenpunkt« $p^{\gamma\delta}$ (mit den Koordinaten $y_\alpha = 0$, $y_\beta = 0$, $y_\gamma = p_\gamma$, $y_\delta = p_\delta$).

Ist ein Koordinatenquadrupel $p_1 : p_2 : p_3 : p_4$ gegeben, so pflegt man zum zugehörenden Punkte p zu gelangen, indem man etwa auf der Kante $\gamma\delta$ den Kantenpunkt mit den Koordinaten $y_\alpha = 0$, $y_\beta = 0$, $y_\gamma = p_\gamma$, $y_\delta = p_\delta$ mit Hilfe desjenigen »projektiven Maßstabs« sucht, der die Punkte γ, δ zu Fundamentalpunkten und den Kantenpunkt $e^{\gamma\delta}$ von e zum Einheitspunkt hat. Das wiederholt man für drei von einer Ecke ausgehende Kanten, erhält durch einfache Konstruktionen zwei Flächenpunkte und daraus p. Duale Ueberlegungen gelten für den ε-Raum.

Von diesem Zusammenhang zwischen Koordinatenquadrupel, Element, Flächen und Kantenpunkten möchte man ein »ebenes Bild« haben und entwirft deshalb von der gesamten Konstellation einen p- bzw. ε-Riß.

Für den p-Raum werde diese Abbildung etwa durch $\mathfrak{M}p = p$ bezeichnet. Die zu den Flächenpunkten p^α einer Punktmenge (p) gehörende Bildmenge $(p^\alpha) = \mathfrak{M}(p^\alpha)$ ist aufzufassen als ein allgemeiner p-Riß der Gesamtheit (p) mit dem singulären Zentrum α. Das gilt für jeden Index $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Zwei dieser allgemeinen p-Risse reichen aber aus, um — immer bei gegebenem Raumtetraeder — eindeutig einen Raumpunkt zu charakterisieren, die übrigen Risse sind aus ihnen durch anschauliche Konstruktionen im Bildgebiet π zu gewinnen[1]). Bei der üblichen, metrisch spezialisierten Achsonometrie wählt man meist den Riß $p = \mathfrak{M}p$ und einen Riß $p^\alpha = \mathfrak{M}p^\alpha$.

Die Achsonometrie ist also unserer Auffassung einzuordnen und unterscheidet sich nur dadurch von den »Zwei-Rißsystemen«, daß sie aus Gründen der Anschaulichkeit und Bequemlichkeit oft mehr als zwei Risse verwendet.

7. Zum Schluß sei noch auf folgendes hingewiesen. Nimmt man im Bildfeld σ zwei Hauptrisse des p-Raumes an und zwei ε-Risse, die entstanden seien durch Schnitt von σ mit zwei Hauptrissen des ε-Raumes im Bündel s, so sind — wie oben erwähnt — bei gegebenem »Fundamentalpunkt« o und gegebener »Fundamentalachse« O alle Lagenaufgaben des Raumes lösbar, ohne daß man m, n μ oder ν kennt. Ein in einem der Zwei-Rißsysteme gezeichnetes Objekt ist erst eindeutig bestimmt, wenn diese singulären Raumelemente gewählt sind, und das zweite Rißpaar jenes Objektes ist damit ebenfalls festgelegt. Daher wäre im Bildgebiet die Aufgabe zu lösen, vom p-Riß eines Raumgebildes zum ε-Riß überzugehen und umgekehrt. Es genügt, wenn man den Zusammenhang zwischen den Bildpaaren G', G'' und g_1, g_2 einer Geraden G angeben kann. Ist dann etwa eine Ebene ε durch ihr Bildpaar E_1, E_2 gegeben und sucht man die Perspektivität, durch die ε im p-Riß abgebildet wird, so wählt man in ε zwei Geraden G und H mit den Bildpaaren g_1, g_2, h_1, h_2 (erster Riß auf E_1, zweiter Riß auf E_2), geht nun zu G', G'', H', H'' über und hat damit auch die gesuchte Perspektivität bestimmt, weil deren Zentrum ja fest ist. Der Zusammenhang zwischen G', G'' und g_1, g_2 läßt sich durch elementare Ueberlegungen, auf die hier nicht eingegangen werde, ermitteln.

2. Kapitel: Die Struktur der allgemeinsten linearen Abbildung des Strahlenraumes.

3. Die Bilder der Büschel, Bündel und Felder. Wir betrachten fortan den Strahl als das Element des Raumes und wollen die Struktur des allgemeinsten G-Risses bestimmen. Es soll zunächst aus den Grundforderungen (§ 1,1) gezeigt werden, daß zwischen einem Gebilde erster oder zweiter Stufe und der zugehörigen Bildgesamtheit eine Projektivität besteht, die auch einfach oder zweifach ausgeartet sein kann. Auf Grund dieser Erkenntnis wird — nachdem die Abbildung auf eine Hauptabbildung zurückgeführt ist — das singuläre Gebilde und damit das Abbildungsgesetz bestimmt.

1. Die Büschel. Durch dieselben Schlüsse, die beim Beweis der Hilfssätze im § 2 angewandt wurden, erkennt man die Richtigkeit der beiden ersten Sätze:

1. Hilfssatz. Enthält ein Büschel nur einen singulären Strahl, so haben alle Strahlen des Büschels dasselbe Bild.

[1]) Die Aufgabe, aus zwei Rissen einen dritten zu ermitteln, behandelt G. Hauck: »Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme, Crelles Journ. f. r. u. angew. Math. 95, 97, 98, 108, 111, 128. — E. Müller-Kruppa, Die linearen Abbildungen S. 157.

2. Hilfssatz. Enthält ein Büschel zwei singuläre Strahlen, so sind alle Strahlen des Büschels singulär.

Daraus folgt durch mehrfache Anwendung: Sind drei nicht einem Büschel angehörende Strahlen eines Bündels oder Feldes singulär, so sind alle Strahlen desselben singulär. Ein Gebilde zweiter Stufe, das mindestens einen nicht-singulären Strahl enthält, besitzt also höchstens ein Büschel singulärer Strahlen.

3. Hilfssatz. Haben zwei nicht-singuläre Büschelstrahlen A und B getrennte Bilder A' und B', so ist die Zuordnung zwischen den Elementen von AB und $A'B'$ eineindeutig. AB enthält also keinen singulären Strahl.

Beweis: Einen singulären Strahl kann es in AB nicht geben, weil dann nach dem 2. Hilfssatz A und B zusammenfallende Bilder hätten. Ebenso kann es in $A'B'$ kein Element C' geben, das zwei Originale in AB hat, weil dann wieder A und B in C' abgebildet würden.

4. Hilfssatz. (Umkehrung des 1. Hilfssatzes): Haben zwei nicht-singuläre Strahlen A und B eines Büschels und mit ihnen also alle anderen Strahlen desselben ein Bild $A' = B'$, so enthält das Büschel einen und nur einen singulären Strahl.

Beweis: Gibt es in dem durch AB bestimmten Feld α (oder Bündel a) einen nicht-singulären Strahl C, dessen Bild $C' \neq A'$ ist, so wählen wir im Büschel AC einen beliebigen (nach dem vorigen Satz nicht-singulären) Strahl D; sein Bild D' gehört $A'C'$ an und ist $\neq A'$ und $\neq C'$. Jeder Strahl von $B'C'$ ist Bild mindestens eines Strahles von BC. So ist auch D' Bild eines von B und C verschiedenen Strahles D_1 von BC und daher auch Bild aller Strahlen des Büschels DD_1. Der den Büscheln AB und DD_1 gemeinsame Strahl T ist also singulär.

Hat aber jeder nicht-singuläre Strahl in a und α ein mit A' zusammenfallendes Bild, so gibt es außerhalb von a und α einen nicht-singulären Strahl C_1, dessen Bild $C_1' \neq A'$ ist. Da die Strahlen des Büschels $[a, C_1]$ in A' abgebildet werden, kann man auf das von diesem Büschel bestimmte Feld γ_1 die eben durchgeführten Schlüsse anwenden und die Existenz eines diesem Büschel angehörenden singulären Strahles T_1 nachweisen. Es sei ferner C_2 ein zu T_1 windschiefer, nicht-singulärer Strahl mit einem Bilde $C_2' \neq A'$. Einen solchen Strahl gibt es; denn hätten alle zu T_1 windschiefen nicht-singulären Strahlen ein mit A' zusammenfallendes Bild, so würden die Strahlen jedes T_1 nicht enthaltenden Bündels in A' abgebildet, mithin auch alle T_1 schneidenden Strahlen und also auch C_1, was nicht sein kann. Im Strahlbüschel $[a, C_2]$ gibt es wieder einen singulären Strahl T_2, und daher ist der den Büscheln $T_1 T_2$ und AB gemeinsame Strahl singulär.

Zugleich zeigt der Beweis, daß ein Bündel a oder Feld α, dessen Strahlen in ein Element A' abgebildet werden, ein Büschel singulärer Strahlen enthält.

5. Hilfssatz. Enthält ein Büschel keinen singulären Strahl, so ist die Zuordnung zwischen seinen Strahlen und den zugehörigen Bildelementen eineindeutig.

Denn irgend zwei Strahlen des Büschels müssen verschiedene Bilder haben, weil sonst ein singulärer Strahl vorhanden wäre; daraus folgt nach dem 3. Hilfssatz die Richtigkeit der Behauptung. Natürlich kann ein Bild außer dem entsprechenden Strahl jenes Raumbüschels noch andere, dem Büschel nicht angehörende Originalstrahlen besitzen.

Um nun nachzuweisen, daß die Beziehung zwischen einem Strahlbüschel und seiner Bildgesamtheit projektiv ist, betrachten wir zunächst die Gebilde zweiter Stufe.

2. Die Bündel und Felder. Aus den bisherigen Ergebnissen gewinnen wir unmittelbar den folgenden Satz, mit dem wir zugleich eine einfache Bezeichnung einführen:

Satz 4. In bezug auf eine allgemeine lineare Abbildung des G-Raumes können vier Typen von Gebilden zweiter Stufe auftreten, nämliche solche, bei denen erstens kein Strahl, zweitens nur ein Strahl, drittens ein Strahlbüschel und viertens die ganze Strahlengesamtheit singulär ist. Diese Typen sollen in der angegebenen Reihenfolge vom »Singularitätsgrad 0, 1, 2, oder 3« heißen.

Wir fragen, wie die Bilder dieser Typen aussehen und behaupten zunächst: Hat ein Bündel oder Feld den Singularitätsgrad 2, so werden seine nicht-singulären Strahlen in ein einziges Element abgebildet. Denn ist A' das Bild eines nicht-singulären Strahles A des Bündels oder Feldes, so bestimmt jeder weitere nicht singuläre Strahl B desselben zusammen mit A ein Büschel, das einen singulären Strahl enthält. Daher ist nach dem 2. Hilfssatz $B' = A'$.

Es gilt zweitens: Die nicht-singulären Strahlen eines Bündels oder Feldes vom Singularitätsgrad 1 werden in die Elemente eines Gebildes erster Stufe abgebildet, und jedem dieser Elemente entspricht in jenem Bündel oder Feld ein Büschel von Originalstrahlen.

Beweis: Die Bilder der nicht-singulären Feldstrahlen (bzw. Bündelstrahlen) können nicht in ein einziges Element zusammenfallen, weil sich dann — wie beim Beweis des 4. Hilfssatzes gezeigt — ein Büschel singulärer Strahlen nachweisen ließe. Sind A und B zwei Strahlen mit getrennten Bildern A' und B' und ist T' der singuläre Strahl, so hat ein Strahl C des Feldes nach dem 1. Hilfssatz dasselbe Bild, wie der den Büscheln TC und AB gemeinsame Strahl; dessen Bild ist aber ein Element von $A'B'$. Umgekehrt hat jedes Element von $A'B'$ einen Strahl D von AB, also alle Strahlen des Büschels DT zum Original.

Und schließlich beweisen wir: Zwischen den Strahlen eines Bündels oder Feldes vom Singularitätsgrad 0 und der entsprechenden Bildgesamtheit besteht eine nicht-ausgeartete Projektivität.

Die Abbildung ist eindeutig, da nach dem 5. Hilfssatz jedes Büschel eindeutig in ein nicht-ausgeartetes Büschel abgebildet wird. Es hat aber auch — wie man nach dem 4. Hilfssatz schließt — jedes Bildelement in dem Bündel oder Feld einen und nur einen Originalstrahl. Daher besteht in der Tat zwischen dem Raumgebilde und dem Bildgebiet eine nicht-ausgeartete Kollineation.

Ist also das von einem Büschel bestimmte Bündel oder Feld vom Singularitätsgrad 0, so ist dieses Büschel projektiv zu seiner Bildgesamtheit. Enthält dagegen das Bündel und Feld je einen, dem Büschel nicht angehörenden singulären Strahl, so läßt sich aus der Eineindeutigkeit zwischen Büschel und Bildgesamtheit noch nicht die Projektivität schließen. Wir werden diese erst beim Beweis des 6. Satzes erkennen, sprechen das Gesamtergebnis aber schon hier aus:

Satz 5. Die nicht-singulären Strahlen eines Bündels oder Feldes vom Singularitätsgrad k ($k = 0, 1, 2$) werden projektiv abgebildet in die Elemente eines Gebildes $(2-k)$-ter Stufe, wenn man ein einziges Element als ein Gebilde 0. Stufe bezeichnet.

Werden umgekehrt die nicht singulären Strahlen eines Bündels oder Feldes in die Elemente eines Gebildes k. Stufe ($k = 0, 1, 2$) abgebildet, so ist das Bündel oder Feld vom Singularitätsgrad $(2-k)$.

Insbesondere erkennt man: Haben drei nicht-singuläre und nicht einem Büschel angehörende Strahlen eines Bündels oder Feldes drei nicht einem Gebilde erster Stufe angehörende Bilder, so ist jenes Bündel oder Feld vom Singularitätsgrad 0.

3. Schließlich beweisen wir den

Satz 6. Es gibt mindestens ein Bündel oder Feld vom Singularitätsgrad 0.

Wir zeigen zunächst, daß es Büschel gibt, die in nicht-ausgeartete Gebilde erster Stufe abgebildet werden. Macht man nämlich die Annahme, daß jedes Büschel ein ausgeartetes Bild, also auch einen singulären Strahl besitzt, so ist jedes Bündel mindestens vom Singularitätsgrad 2. Sind A und B die nicht-singulären Originalstrahlen zweier getrennter Bilder A' und B', so könnte man aus einem A enthaltenden Bündel und einem davon verschiedenen, B enthaltenden Bündel je einen nicht-singulären Strahl so herausgreifen, daß diese Strahlen sich schneiden und ihr Büschel also doch in das nicht-ausgeartete Büschel $A'B'$ abgebildet würde.

Es gibt daher mindestens ein Büschel $(A) = [a, \alpha]$ ohne singulären Strahl. Ist das durch das Büschel bestimmte Bündel a oder Feld α noch nicht vom Singularitätsgrad 0, so können beide nur vom Singularitätsgrad 1 sein, und die Bilder ihrer nicht-singulären Strahlen gehören dem Bildbüschel (A') und (A) an. Wir behaupten, daß es in diesem Fall mindestens ein Bündel und ein Feld vom Singularitätsgrad 0 gibt. Wäre nämlich unter den mit α inzidenten, aber nicht auf dem singulären Strahl T von α liegenden Bündelpunkten b kein einziger vom Singularitätsgrad 0, so wären diese Bündel wieder vom Singularitätsgrad 1, die Bilder ihrer nicht-singulären Strahlen müßten dem Büschel (A') angehören und daraus würde folgen, daß die Bilder der nicht-singulären Strahlen irgendeines Raumbündels, d. h. die Bilder sämtlicher nicht-singulären Raumstrahlen Elemente von (A') wären, entgegen der ersten Forderung. Es gibt daher mindestens ein mit α inzidentes Bündel b und ebenso ein mit a inzidentes Feld β vom Singularitätsgrad 0.

Ist aber bereits a oder α vom Singularitätsgrad 0, so kann man nicht nachweisen, daß es Bündel und Felder vom Singularitätsgrad 0 gibt. Wir werden Abbildungen kennen lernen, bei denen jedes Bündel, und andere, bei denen jedes Feld mindestens einen singulären Strahl enthält.

Zwischen dem Bündel b und seiner Bildgesamtheit besteht eine nicht-ausgeartete Kollineation. Es wird also das Büschel $(B) = [b, \alpha]$ in das zu ihm projektive Büschel (A') abgebildet, und da jeder A-Strahl dasselbe Bild hat, wie der zum Punkte AT führende B-Strahl, so ist die Zuordnung zwischen (A) und (A') projektiv. Damit ist auch der Satz 5 vollständig bewiesen.

4. Das singuläre Gebilde und die konstruktive Herstellung der Abbildung.

1. Es soll nunmehr die Gestalt des singulären Gebildes ermittelt werden. Um die Abbildung auf eine Hauptabbildung zurückzuführen, suchen wir ein Bündel $a = (A)$ oder Feld $\alpha = (A)$ vom Singularitätsgrad 0 (Satz 6). Zwischen den Strahlen A und ihren Bildern A' besteht eine nicht-ausgeartete Kollineation $(A) = \mathfrak{K}(A')$. Indem wir allen Strahlen, die bei der gegebenen Abbildung das Bild A' hatten, jetzt als Bild den Strahl $A = \mathfrak{K}A'$ von (A) zuordnen, erhalten wir eine neue G-Abbildung auf die Strahlen des Bündels bzw. Feldes (A), bei der die Strahlen dieses Gebildes sich selbst entsprechen, d. h. eine Hauptabbildung.

Um die Struktur unserer Abbildung zu untersuchen, beschränken wir uns fortan auf den Fall, daß eine »Hauptabbildung« auf die Strahlen eines Feldes π vorliege. Indem wir die Ergebnisse dual aussprechen, erhalten wir die Hauptabbildung auf die Strahlen eines Bündels.

2. Satz 7. Bei jeder linearen Abbildung des Strahlenraumes gibt es singuläre Strahlen.

Beweis: Hat ein beliebig gewähltes Feld ε mit dem Spurstrahl $E = \varepsilon\pi$ keinen singulären Strahl, so wird es in ein zu ihm kollineares Feld ε' abgebildet. Beschreibt der »Büschelpunkt« a eines in ε gelegenen Büschels die Punktreihe auf E, so durchläuft sein Bild a' eine zu ihr projektive Punktreihe auf E. Die Reihen (a) und (a') haben zwei Doppelelemente a_1 und a_2. Das ε-Büschel a_1 wird also in das π-Büschel a_1 abgebildet, das π-Büschel a_1 — aufgefaßt als Raumbüschel — in sich selbst, mithin auch das ganze Bündel a_1 in das nicht-ausgeartete π-Büschel a_1 und ebenso das Bündel a_2 in das π-Büschel a_2. Die beiden Bündel a_1 und a_2 sind also vom Singularitätsgrad 1. Damit ist die Existenz singulärer Strahlen nachgewiesen.

Zugleich erkennt man, daß es auf jedem π-Strahl mindestens einen Bündelpunkt vom Singularitätsgrad 1 gibt. Da ferner π vom Singularitätsgrad 0 ist, so kann es in π keinen Bündelpunkt vom Singularitätsgrad > 1 geben. Aus demselben Grunde gibt es bei dieser Hauptabbildung kein Feld vom Singularitätsgrad 3 und bei einer Hauptabbildung auf die Strahlen eines Bündels kein Bündel vom Singularitätsgrad 3.

Ein Büschel, das einen π-Strahl, also einen sich selbst entsprechenden Strahl enthält, soll ein »Hauptbüschel« heißen. Aus dem 1. Hilfssatz ergibt sich dann der im folgenden oft benutzte:

Satz 8. Enthält ein Hauptbüschel einen singulären Strahl, so werden seine nichtsingulären Strahlen in den π-Strahl des Büschels abgebildet.

3. Nach den Bemerkungen des letzten Abschnitts lassen sich in π drei Bündelpunkte $t_\varkappa$ vom Singularitätgrad 1 auswählen. Sie bilden entweder ein Dreieck oder liegen auf einer Geraden. Im ersten Fall, den wir zunächst behandeln, gibt es drei Möglichkeiten: 1. Die singulären Strahlen $T_\varkappa$ der Bündel $t_\varkappa$ sind paarweise windschief. 2. Zwei von ihnen schneiden sich, der dritte geht nicht durch ihren Schnittpunkt. 3. Sie haben einen Punkt gemeinsam.

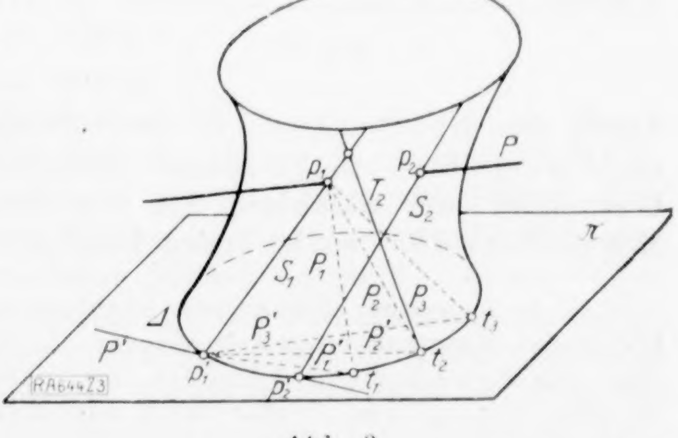


Abb. 3.

Erster Typus. Die drei singulären Strahlen sind paarweise windschief.

Die Strahlen S, die alle Strahlen $T_\varkappa$ schneiden, bilden eine nicht-ausgeartete Regelschar (S). Es sei S_1 einer ihrer Strahlen mit einem Spurpunkt $p_1' \neq t_\varkappa$ und $p_1 \neq p_1'$ ein Punkt auf S_1. Die gewiß nicht einem Büschel angehören-

den Strahlen $p_1 t_x = P_x$ werden (Abb. 3) in die Strahlen $P_x' = p_1' t_x$ abgebildet, weil die Hauptbüschel $P_x P_x'$ $(x = 1, 2, 3)$ je einen singulären Strahl T_x enthalten (Satz 8). Daher werden nach Satz 5 alle Strahlen des Bündels p_1, insbesondere auch S_1, in Strahlen durch p_1' abgebildet, und es sind mithin p_1 und p_1' vom Singularitätsgrad 1. Das gilt, wie ähnliche Betrachtungen zeigen, auch dann, wenn p_1 auf einem S-Strahl durch t_x liegt. Sind also p_1 und p_2 zwei »𝔖-Punkte« eines Raumstrahles P, d. h. Punkte auf der durch die Schar (S) bestimmten Regelfläche, S_1 und S_2 die 𝔖-Strahlen durch p_1 und p_2, so muß das Bild P' durch die Spurpunkte p_1' und p_2' dieser »projizierenden« Strahlen gehen.

Die Strahlen der zur Schar (S) konjugierten Schar (T), die auch die Strahlen T_x enthält, werden singulär; ihnen wird jeder π-Strahl als Bild zugeordnet. Weitere singuläre Strahlen kann es aber nicht geben. Denn die 𝔖-Punkte eines nicht der T-Schar angehörenden singulären Strahles wären dann mindestens vom Singularitätsgrad 2, während sie, wie gezeigt, vom Singularitätsgrad 1 sind.

Ein 𝔖-Strahl wird nach Satz 8 abgebildet in den π-Strahl des Büschels ST, wenn T der singuläre Strahl durch seinen Spurpunkt s ist. Dieser π-Strahl ist aber die durch s gehende Tangente der Spurkurve Δ von (S). — Die Zusammenfassung der Ergebnisse liefert den zunächst nur für die Voraussetzungen dieses ersten Falles bewiesenen:

Satz 9. Das singuläre Gebilde einer linearen Abbildung des Strahlenraumes ist eine Regelschar zweiter Ordnung (T). Das Hauptbild eines Strahles P wird mit Hilfe der zur Schar (T) konjugierten Schar (S), der projizierenden Schar, so erhalten: Man bestimme ein Strahlenpaar S_1, S_2, das P schneidet; der π-Strahl der »𝔖-Kongruenz« mit den Brennlinien S_1, S_2 ist dann das Bild (bzw. ein Bild) P' von P (Abb. 3).

Umgekehrt entspricht jedem Bilde P' eine lineare Kongruenz von Originalstrahlen, die auch die singulären Strahlen enthält. Ihre Brennlinien sind die 𝔖-Strahlen, die durch die Δ-Punkte[1]) von P' gehen, wenn Δ die »Fundamentalkurve«, d. h. die Spurkurve der Schar (S) bedeutet.

Der innere Grund der Linearität dieser Abbildung besteht darin, daß die Strahlen S einer Regelschar in zwei beliebigen Ebenen ε und π projektive Punktreihen ausschneiden. Durch die Zuordnung dieser Punktreihen werden die Ebenen ε und π projektiv, d. h. kollinear auf einander bezogen, und zwar so, daß der Schnittstrahl $\varepsilon\pi$ sich selbst entspricht.

Es sei endlich bemerkt, daß bei diesem Typus nur Bündel und Felder vom Singularitätsgrad 0 oder 1 auftreten.

4. Zweiter Typus. Die singulären Strahlen T_1 und T_2 schneiden sich in r_1, T_3 geht nicht durch r_1.

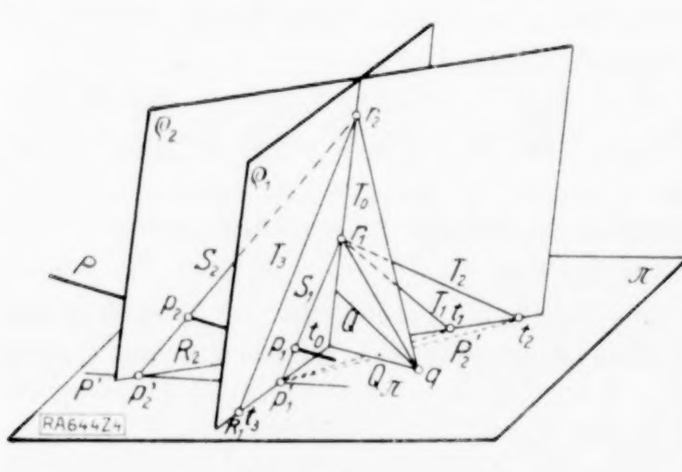


Abb. 4.

In diesem Fall bestimmen T_1 und T_2 ein Büschel singulärer Strahlen, dessen Ebene ϱ_2 heiße. Ist $r_2 = T_3 \varrho_2$, so ist auch der Strahl $r_1 r_2 = T_0$ singulär und mithin auch das Büschel $T_0 T_3$ mit der Büschelebene ϱ_1. ϱ_1 und ϱ_2 sind also vom Singularitätsgrad 2, so daß alle nichtsingulären Strahlen von ϱ_1 in $R_1 = \varrho_1 \pi$ und die von ϱ_2 in $R_2 = \varrho_2 \pi$ abgebildet werden. Ist p_1 ein nicht auf T_0 liegender Bündelpunkt in ϱ_1, so werden wieder die drei nicht einem Büschel angehörenden Strahlen $P_x = p_1 t_x$ in die π-Strahlen P_x' der Büschel $P_x T_x$ abgebildet (Satz 8, Abb. 4). Da die Büschelebenen dieser drei Büschel einen Strahl $r_1 p_1$ gemeinsam haben, so gehen die P_x' durch den Spurpunkt p_1' dieses Strahles und mithin nach Satz 5 auch die Bilder P' aller nicht-singulären p_1-Strahlen. Bezeichnen wir die Büschel $[r_1, \varrho_1]$ und $[r_2, \varrho_2]$, also die Gesamtheit der Strahlen, die die Strahlen T_x schneiden, wieder als die »projizierende Regelschar« (S), so ist jedes Bündel, das einen von T_0 verschiedenen 𝔖-Strahl enthält,

[1]) Zwischen reellen und imaginären Elementen wird im folgenden kein Unterschied gemacht. Ueber das Konstruieren mit imaginären Elementen vergl. J. Grünwald: »Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen« (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 45. Bd., S. 10 ff.) und »Ueber das Konstruieren mit imaginären Punkten, Geraden und Ebenen« (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 46. Bd, S. 323 ff.).

vom Singularitätsgrad 1. Die Hauptbilder P' der nicht dem Komplex T_0 angehörenden Strahlen werden mithin nach der im Satz 9 gegebenen Regel hergestellt. Die Fundamentalkurve Δ ist das Geradenpaar R_1, R_2.

Außer den Büscheln $[r_1, \varrho_2]$ und $[r_2, \varrho_1]$ gibt es keine singulären Strahlen. Ein T_0 nicht schneidender Strahl ist ja gewiß nicht singulär, weil seine $\mathfrak{S}$-Punkte sonst wieder von größerem Singularitätsgrad als 1 wären. Aber auch die von r_1 und r_2 verschiedenen, T_0 enthaltenden Bündel sind vom Singularitätsgrad 1, weil ihre ϱ_1- und ϱ_2-Strahlen nicht singulär sind und die nicht zusammenfallenden Bilder R_1 und R_2 besitzen. Dagegen sind die Bündel r_1 und r_2 mindestens vom Singularitätsgrad 2; sie können aber nicht vom Singularitätsgrad 3 sein, weil dann auch ϱ_1 und ϱ_2 vom Singularitätsgrad 3 wären. Es gibt daher keine weiteren T-Strahlen. Außer r_1 und r_2, ϱ_1 und ϱ_2 treten nur Bündel und Felder vom Singularitätsgrad 0 und 1 auf.

Die nicht-singulären r_1-Strahlen werden in einen einzigen Strahl, nämlich das Bild R_1 des Büschels $[r_1, \varrho_1]$ abgebildet, die nicht-singulären r_2-Strahlen in R_2. Damit ist ein Mittel gegeben, um auch für einen Strahl Q des Komplexes T_0, für den unsere Konstruktion nicht mehr eindeutig zu sein scheint, das Bild zu ermitteln. Denn ist q sein Spurpunkt und $Q_\pi = q t_0$, so wird das Büschel $Q Q_\pi$ in ein zu ihm projektives, nicht ausgeartetes Büschel abgebildet, und zwar $q r_1$ in R_1, $q r_2$ in R_2 und Q_π in sich selbst. Damit ist auch Q' festgelegt.

5. Dritter Typus. a) Die drei singulären Strahlen $T_\varkappa$ gehören einem Bündel o an.

Nach dem 2. Hilfssatz ist o vom Singularitätsgrad 3. Einen weiteren nicht durch o gehenden singulären Strahl T kann es nicht geben, weil dann ein Feld oT vom Singularitätsgrad 3 existieren würde. Ist T_p der durch den Spurpunkt p eines Strahles P gehende T-Strahl, so ist P' der π-Strahl des Büschels $P T_p$, entsteht also aus P durch »Zentralprojektion« vom Zentrum o. Man kann als projizierende Schar einen beliebigen Strahlenkegel 2. Grades mit dem Zentrum o wählen, oder aber — und diese Auffassung soll für das Folgende beibehalten werden — das ganze Bündel o; projizierende und singuläre Schar sind dann identisch. Und da im Satz 9 gesagt wurde, daß man »ein« den Strahl P schneidendes $\mathfrak{S}$-Strahlenpaar zu wählen hat, so behält der Satz seine Gültigkeit. Unter dem »Fundamentalgebiet« Δ ist jetzt das ganze Punktfeld π zu verstehen. Die einem Bilde P' entsprechende Kongruenz von Originalstrahlen ist ausgeartet und besteht aus dem Felde oP' und dem Bündel o.

b) Bei der Ermittlung der einzelnen Typen haben wir bisher angenommen, daß es gelungen sei, mindestens ein Feld π vom Singularitätsgrad 0 aufzufinden, das wir zum Bildgebiet der Hauptabbildung machen. Bei den ersten beiden Typen erkannten wir nachträglich, daß außer π noch weitere Felder und auch Bündel vom Singularitätsgrad 0 existieren, daß wir also als Hauptbildgebiet ebenso gut ein anderes Feld, aber auch ein Bündel hätten wählen können. Wir wären dann bei Wahl eines Bündels und bei entsprechender Annahme für die drei singulären Strahlen $T_\varkappa$ wieder zum selben Typus gekommen. Anders aber beim dritten Typus. Hier existieren nur Felder, nicht aber Bündel vom Singularitätsgrad 0, und man kann, unter Beibehaltung der Strahlen $T_\varkappa$, also des singulären Gebildes, keine Hauptabbildung auf ein Bündel herstellen.

Zu einem neuen Typus kommt man aber durch die duale Betrachtung, wenn man also von der Existenz eines Bündels a vom Singularitätsgrad 0 ausgeht und als dritte Spezialisierung drei in einem Felde ω liegende $\mathfrak{T}$-Strahlen $T_\varkappa$ annimmt (Abb. 5). Dann ist ω vom Singularitätsgrad 3, und es gibt außerhalb von ω keine $\mathfrak{T}$-Strahlen. Ist T_p der T-Strahl des Feldes aP, so wird P abgebildet in den a-Strahl des Büschels $P T_p$, also in jenen a-Strahl, der zum Durchstoßpunkt $P\omega$ führt. Deuten wir das ganze Strahlenfeld ω zugleich wieder als projizierende Schar (S), so ist der Satz 9 auch für diese Abbildung richtig, wenn man π durch a ersetzt. Man überzeugt sich leicht, daß auch eine beliebige Strahlenkurve zweiter Klasse in ω als »projizierend« angenommen werden kann, entsprechend dem Kegel zweiter Klasse durch o.

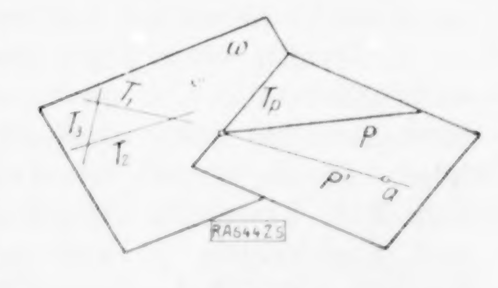


Abb. 5.

Aus diesem Fall ergibt sich die übliche »Spurabbildung« des Strahlenraumes, indem man als neue Bildgesamtheit das zum Hauptriß perspektive Punktfeld ω wählt; dadurch erhält P seinen Spurpunkt $p = P\omega$ als Bild zugeordnet. Doch ist zu beachten, daß bei dieser Deutung einem ω-Strahl als Hauptriß alle a-Strahlen, also als Spurbild alle

ω-Punkte zugeordnet werden und nicht nur, wie bei der üblichen Deutung, die mit ihm vereinigten ω-Punkte.

6. Um zu zeigen, daß sich für den jetzt zu untersuchenden zweiten Hauptfall, bei dem die drei Bündelpunkte t_x einen π-Strahl R gemeinsam haben, nur noch ein neuer Typus ergibt, nehmen wir zunächst die drei Strahlen T_x wieder paarweise windschief an. Ist p ein Punkt auf T_3 (Abb. 6), so werden die Strahlen $p\,t_1 = P_1$ und $p\,t_2 = P_2$ in die π-Strahlen P_1' und P_2' der Büschel $T_1\,P_1$ bzw. $T_2\,P_2$ abgebildet, die gewiß von R verschieden sind. Da nun P_1 und P_2 nicht singulär sein können und in ihrem Büschel den singulären Strahl T_3 enthalten, müßten ihre Risse anderseits zusammenfallen. Die gemachte Annnahme ist also unmöglich. Außerhalb von R dürfen wir keinen π-Punkt vom Singularitätsgrad 1 annehmen, weil sonst einer der schon behandelten Fälle vorläge. Da jeder π-Strahl aber mindestens einen Punkt vom Singularitätsgrad 1 enthält, müssen sämtliche Punkte auf R vom Singularitätsgrad 1 sein. Es bleibt jetzt nur ein

Vierter Typus: Die drei Strahlen T_x gehören einem Büschel $[r, \varrho]$ an.

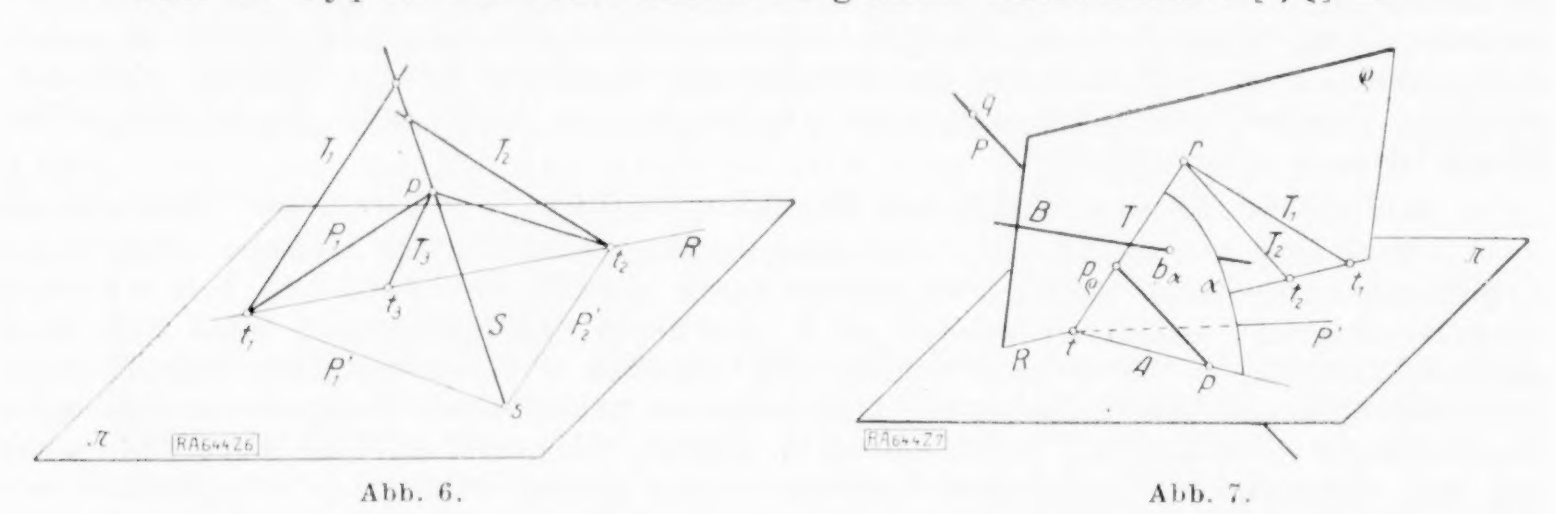


Abb. 6. Abb. 7.

Denn schneiden sich etwa T_1 und T_2, so bestimmen sie ein Büschel singulärer Strahlen $[r, \varrho]$, dem auch T_3 angehören muß, da es außerhalb dieses Büschels keine singulären Strahlen geben kann (Abb. 7). r und ϱ sind vom Singularitätsgrad 2. Alle nichtsingulären ϱ-Strahlen X werden in R abgebildet, alle nicht-singulären r-Strahlen Y in einem einzigen Strahl Y'. Wäre dieser $\neq R$, so wäre ein auf Y' gewählter Punkt y vom Singularitätsgrad 1, weil das π-Büschel y sich selbst entspricht und $Y = y\,r$ ebenfalls den Strahl Y' dieses Büschels zum Bilde hätte. Es bleibt also nur $Y' = R$ möglich. Bekannt ist endlich nach Satz 9 das Bild jedes R schneidenden Strahles Z.

Es sei P ein Strahl, der keiner der Scharen (X), (Y) und (Z) angehöre, $p = P\,\pi$, $p_\varrho = P_\varrho$ und $T = r\,p_\varrho$ mit dem Spurpunkt t. Da $Y = r\,p$ in R und $A = t\,p$ in sich selbst abgebildet wird, muß P' durch t gehen, aber $\neq R$ und $\neq A$ sein. Ein weiterer Ort für P' läßt sich jedoch nicht angeben. Denn ist q ein Punkt auf P, so kennt man nur das Bild des Büschels $[q, R]$ und das des Strahles $q\,r$. Das reicht aber nicht aus, um die zwischen dem Bündel q und seinem Bildfelde bestehende Kollineation und damit P' eindeutig festzulegen. Ebenso kann das Bildfeld eines beliebigen, P enthaltenden Feldes noch nicht bestimmt werden.

Wählt man aber das Bild P' des beliebig aber fest herausgegriffenen Strahles P willkürlich durch t, aber $\neq R$ und $\neq A$, so sind die Bilder aller anderen nicht singulären Raumstrahlen jetzt eindeutig festgelegt, wie durch mehrfache Anwendung der Hilfssätze folgt. Dieser Typus ist also nicht allein durch Angabe des singulären Gebildes bestimmt. Der Fall kann als Grenzfall des zweiten Typus erhalten werden, indem man r_1 und r_2 und gleichzeitig ϱ_1 und ϱ_2 zusammenrücken läßt: Dann decken sich projizierende und singuläre Büschel. Einem Bilde P' entspricht eine parabolische Kongruenz[1]) von Originalstrahlen, deren Brennlinien in den zum Punkte $P'\,R$ führenden $\mathfrak{T}$-Strahl zusammengefallen sind und deren π-Strahl P' ist. (Läßt man beim zweiten Typus dagegen nur r_1 und r_2 oder nur ϱ_1 und ϱ_2 zusammenfallen, so ergeben sich die beiden dritten Typen). Im folgenden werde i. a. unter einer linearen Abbildung des Strahlenraumes nur einer der ersten drei Typen, nicht aber dieser vierte Fall verstanden. Die Ergebnisse, die wir erhalten werden, lassen sich freilich stets auf diesen Fall übertragen, indem man den erwähnten Grenzübergang ausführt.

[1]) Ueber parabolische Kongruenzen vergl. etwa Müller-Kruppa, Die lin. Abb. S. 71/72.

7. Die Unterscheidung der vier Fälle hat gelehrt, daß nur beim Typus 3a alle Bündel und nur beim Typus 3b alle Felder vom Singularitätsgrad 1 sind, mit Ausnahme eines einzigen Bündels oder Feldes, das vom Singularitätsgrad 3 ist. In diesen Fällen wird jedem Bündel p bzw. Felde ε ein Strahlbüschel, d. h. ein Punkt p' oder ε' im Bildgebiet zugeordnet. Und da diese Abbildungen $p \to p'$ und $\varepsilon \to \varepsilon'$ den Grundforderungen genügen, so lassen sich diese und nur diese beiden Typen von Strahlabbildungen als p- bzw. ε Riß deuten.

Die hier behandelten Typen kann man natürlich auch durch andere Konstruktionsgesetze erhalten. So wird eine von Jan de Vries angegebene Abbildung[1]) dadurch definiert, daß einem Strahl P zunächst seine Polare P' in bezug auf eine Fläche 2. Grades Λ zugeordnet wird und darauf als Bild in der Ebene π der Spurpunkt p' dieser Polaren. Dieser Riß entsteht auch, wie wir behaupten, durch polare Umformung einer Zentralprojektion, deren Zentrum m der Pol von π in bezug auf Λ ist.

Die einzigen Strahlen nämlich, die mehr als ein Bild erhalten, sind die durch m gehenden Strahlen T, da ihre Polaren T' in π liegen. Das Bündel $m = (T)$ muß also das singuläre Gebilde sein. Ist p' das Bild des nicht-singulären Strahles P, P_1 der durch m erzeugte Zentralriß von P, so ist $m\,p'$ die Polare von P_1 in bezug auf Λ, also p' der Pol von P_1 in bezug auf die Spurkurve von Λ. Es entsteht also in der Tat das Bildfeld (p') aus dem Felde (P_1) durch eine Polarität und stellt daher einen sehr speziellen G-Riß dar.

5. Die Bilder linearer Kongruenzen und Regelscharen. 1. Eine nicht-ausgeartete lineare Kongruenz enthält Strahlbüschel, deren »Büschelpunkte« auf den Brennlinien F und G der Kongruenz liegen. Wir nennen diese Punkte, aufgefaßt als Zentren aller der Kongruenz angehörenden Büschel, die Büschelpunkte der Kongruenz. Sind a und b zwei Büschelpunkte auf F, so wollen wir die Strahlen ihrer Büschel (A) und (B) projektiv dadurch aufeinander beziehen, daß wir je zwei Strahlen einander zuordnen, die auf G denselben Punkt p ausschneiden. Da die Bildbüschel $a' = (A')$ und $b' = (B')$ dann ebenfalls projektiv zu einander sind, und da sich zwei homologe Bilder A' und B' im Bildpunkt p' des Büschelpunktes p treffen, so liegen die Bilder p' aller Büschelpunkte p von G auf einer a' und b' enthaltenden Kurve zweiter Ordnung Γ. Und da ja a und b auf F beliebig gewählt waren, so enthält Γ auch alle Bildpunkte der auf F liegenden Büschelpunkte. Sind f_1 und f_2 die $\mathfrak{S}$-Punkte von F, so werden den Büscheln $[f_1, G]$ und $[f_2, G]$ die Δ Punkte f_1' und f_2' von F' zugeordnet. Γ geht also durch die Δ-Punkte von F' und G'.

Satz 10. Die Bildpunkte der Büschelpunkte einer nicht ausgearteten linearen Kongruenz bilden eine Kurve zweiter Ordnung Γ, die wir kurz als »Büschelkurve« der Kongruenz bezeichnen.

Jeder Punkt auf Γ ist Bild eines Büschelpunktes auf F und eines auf G. Hält man a fest und läßt A sein Büschel $(A) = a$ durchlaufen, so schneidet das sich um a' drehende Bild A' auf Γ die Bilder p' der Büschelpunkte p von G aus. Kommt p' nach a', so wird A' die Tangente an Γ, also:

Satz 11. Der Schnittstrahl zweier bildgleicher Büschel einer linearen, nicht ausgearteten Kongruenz hat zum Bilde die Tangente an Γ in dem betreffenden Bildpunkt.

Wir erwähnen die wichtigsten Spezialfälle. Ist F ein projizierender Strahl und gehört G nicht den Scharen (S) und (T) an, so geht durch die $\mathfrak{S}$-Punkte g_1 und g_2 von G je ein T-Strahl, der auf F die Punkte a bzw. b ausschneidet. Die nicht-singulären Strahlen des Büschels $[a, G]$ und zugleich die des Büschels $[g_2, F]$ werden in einen Strahl A', die nicht-singulären Strahlen von $[b, G]$ und $[g_1, F]$ in einen Strahl B' durch den Spurpunkt f von F abgebildet. Alle anderen Büschel haben f zum Bilde. Γ zerfällt in A' und B'.

Ist aber F ein singulärer Strahl, so geht durch jeden Punkt a auf F ein $\mathfrak{S}$-Strahl, der das Büschel $[a, G]$ in einen Punkt a' der Fundamentalkurve Δ projiziert. In diesem Fall ist also $\Gamma = \Delta$. Ist endlich F ein π-Strahl, so sind seine Δ-Punkte zugleich seine Γ-Punkte.

2. Auf F sei eine Punktreihe (a), auf G eine zu ihr projektive Punktreihe (b) gegeben. Die Bildpunkte a' und b' der Büschel $[a, G]$ bzw. $[b, F]$ liegen auf einem

[1]) Jan de Vries, Eine Abbildung der Geraden des Raumes auf die Punktepaare einer Ebene. (Christian Huygens, International mathematisch Tidschrift, 2. Jahrgang, 1922—1923, Nr. III.)

Kegelschnitt Γ. Wir suchen das Bild der durch die Verbindungsgeraden homologer Punkte $H = a\,b$ gebildeten Regelschar (H). Sind a_0 und b_0 zwei sich entsprechende, festgehaltene Punkte, so sind die Büschel $(a_0\,b)$ und $(b_0\,a)$ projektiv, wenn a und b homologe Punkte auf F bzw. G bedeuten, daher auch die Bildbüschel $a_0' = (a_0'\,b')$ und $b_0' = (b_0'\,a')$ und folglich also die auf Γ liegenden Punktreihen (a') und (b'). Das Erzeugnis dieser beiden projektiven Punktreihen, d. h. die Gesamtheit der Bildstrahlen $H' = a'\,b'$ bildet mithin nach einem bekannten Satz der projektiven Geometrie eine zu jeder dieser Punktreihen projektive Kurve zweiter Klasse oder in speziellen Fällen ein Strahlenbüschel[1]).

Satz 12. **Die Bilder der Strahlen einer Regelschar bilden eine zu ihr projektive Kurve zweiter Klasse.**

3. Kapitel. Eine analytische Behandlungsweise.

6. Die Hauptmatrizen einer Regelschar. 1. Da den Regelscharen zweiter Ordnung bei unserer Abbildung eine besondere Bedeutung zukommt, so soll für sie eine vorteilhafte Parameterdarstellung angegeben werden.

Eine Regelschar zweiter Ordnung wird definiert als die Gesamtheit von Strahlen (B), deren Koordinaten B_i $(i = 1, \ldots, 6)$ drei linearen homogenen Gleichungen

$$\mathfrak{a}_{\varkappa 1}\,B_4 + \mathfrak{a}_{\varkappa 2}\,B_5 + \mathfrak{a}_{\varkappa 3}\,B_6 + \mathfrak{a}_{\varkappa 4}\,B_1 + \mathfrak{a}_{\varkappa 5}\,B_2 + \mathfrak{a}_{\varkappa 6}\,B_3 \equiv L(\mathfrak{a}_\varkappa, B) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

genügen[2]), d. h. den Gleichungen dreier linearer Komplexe $\mathfrak{a}_\varkappa$ mit den »Komplexkoordinaten« $\mathfrak{a}_{\varkappa i}$ $(\varkappa = 1, 2, 3;\ i = 1, \ldots, 6)$. Sie ist also durch eine Matrix $\mathfrak{A}$ von drei Zeilen und sechs Kolonnen gegeben, deren Zeilen mit beliebigen, von 0 verschiedenen Faktoren multipliziert werden dürfen. Der Rang der Matrix sei 3, damit die drei Bestimmungskomplexe nicht einem Büschel angehören. Bezeichnet man drei lineare Formen $L(\mathfrak{a}_\varkappa, B) = B'_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ durch das Symbol $\mathfrak{A}(B) = (B')$, so lassen sich die Gl. (1) auch schreiben:

$$\mathfrak{A}(B) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die zur Schar (B) konjugierte Schar (A) wird durch ein Gleichungssystem

$$\mathfrak{B}(A) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dargestellt. Dabei ist die Matrix $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{b}_{\varkappa i}\}$ ebenfalls vom Range 3 und mit $\mathfrak{A}$ durch die neun Gleichungen

$$L(\mathfrak{a}_\varkappa, \mathfrak{b}_\lambda) = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

verknüpft[3]). $\mathfrak{A}$ heiße eine »Leitmatrix« der Schar (B), $\mathfrak{B}$ eine »Leitmatrix« der Schar (A). Die Koordinaten A_i und B_i sind — als Lösungen der linearen Gleichungssysteme (2) und (3) — von der Form

$$A_i = \lambda_1\,\mathfrak{a}_{1i} + \lambda_2\,\mathfrak{a}_{2i} + \lambda_3\,\mathfrak{a}_{3i}, \quad B_i = \mu_1\,\mathfrak{b}_{1i} + \mu_2\,\mathfrak{b}_{2i} + \mu_3\,\mathfrak{b}_{3i} \quad (i = 1, \ldots, 6) \quad . \quad (5),$$

und wegen der Plückerschen Relationen $L(A, A) = 0$ und $L(B, B) = 0$ ist

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{3} L(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_\varkappa)\,\lambda_i\,\lambda_\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i,\varkappa=1}^{3} L(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_\varkappa)\,\mu_i\,\mu_\varkappa \doteq 0 \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Deuten wir die $\lambda_\varkappa$ und $\mu_\varkappa$ als projektive Punktkoordinaten in bezug auf das in der Ebene $x_3 = 0$ gelegene Dreieck des Fundamentaltetraeders, so sind die Gl. (5) eine Parameterdarstellung der Scharen (A) und (B), wenn die $\lambda_\varkappa$ und $\mu_\varkappa$ die Koordinaten eines auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_a$ bzw. $\mathfrak{K}_b$ laufenden Punktes λ bzw. μ sind. Diese Kegelschnitte haben die Matrizen[4]) $\mathfrak{K}_a = \{\,L(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_\varkappa)\,\}$ und $\mathfrak{K}_b = \{\,L(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_\varkappa)\,\}$.

2. Zur Darstellung der Scharen (A) und (B) kann man auch zwei Matrizen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ verwenden, deren Zeilen lineare Kombinationen der Zeilen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sind[5]). Sehr fruchtbar erweist sich die Forderung, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ so zu bestimmen, daß der jedem Strahl zugeordnete »Parameterpunkt« λ bzw. μ mit dem Spurpunkt des Strahles in der Ebene III (d. h. der Ebene $x_3 = 0$) zusammenfällt. Daß diese Forderung einen Sinn hat

[1]) Vergl. Reye, Geom. d. Lg., 1909, S. 125.

[2]) Wir verwenden für einen Strahl P im folgenden die auf ein beliebiges Fundamentaltetraeder bezogenen projektiven Strahlkoordinaten

$$P_1 = P_{41},\ P_2 = P_{42},\ P_3 = P_{43},\ P_4 = P_{23},\ P_5 = P_{31},\ P_6 = P_{12}.$$

[3]) Vgl. etwa G. Kowalewski, Analytische Geometrie (1910), § 99.

[4]) Unter der Matrix eines Kegelschnittes wird hier stets die Matrix der Diskriminante verstanden.

[5]) Siehe etwa Zindler, Liniengeometrie I, S. 302, Satz 165.

und unter gewissen geometrischen Voraussetzungen erfüllbar ist, ergibt sich aus folgender Ueberlegung.

Für den Spurpunkt b eines Strahles B ermittelt man in III die Koordinaten

$$b_1 = -B_5 \quad b_2 = B_4 \quad b_3 = B_3 \qquad (7),$$

also nach (5):

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= -(\mu_1 \mathfrak{b}_{15} + \mu_2 \mathfrak{b}_{25} + \mu_3 \mathfrak{b}_{35}) \\ b_2 &= \mu_1 \mathfrak{b}_{14} + \mu_2 \mathfrak{b}_{24} + \mu_3 \mathfrak{b}_{34} \\ b_3 &= \mu_1 \mathfrak{b}_{13} + \mu_2 \mathfrak{b}_{23} + \mu_3 \mathfrak{b}_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

Wir nehmen an, es sei die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{13} & \mathfrak{a}_{14} & \mathfrak{a}_{15} \\ \mathfrak{a}_{23} & \mathfrak{a}_{24} & \mathfrak{a}_{25} \\ \mathfrak{a}_{33} & \mathfrak{a}_{34} & \mathfrak{a}_{35} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9).$$

Da nach (4) die $\mathfrak{b}_{\lambda\iota}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ als drei linear unabhängige Lösungssysteme der Gl. (2) aufzufassen sind, so lassen sich unter der Voraussetzung (9) diese Lösungssysteme $b_{\lambda\iota}$ so spezialisieren, daß das Gleichungssystem (9) die Identität darstellt. Das geschieht, wenn wir setzen:

$$\mathfrak{b}_{15} = 1 \quad \mathfrak{b}_{24} = -1 \quad \mathfrak{b}_{33} = -1$$
$$\mathfrak{b}_{25} = \mathfrak{b}_{35} = \mathfrak{b}_{14} = \mathfrak{b}_{34} = \mathfrak{b}_{13} = \mathfrak{b}_{23} = 0.$$

Aus den Gl. (2) ergeben sich dann eindeutig die übrigen $\mathfrak{b}_{\lambda\iota}$. Die neue Matrix der $\mathfrak{b}_{\lambda\iota}$, die wir jetzt wieder mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen, heiße die der Regelschar (B) in »bezug auf die Fundamentalebene III zugeordnete Hauptmatrix«. Unter einer analogen Voraussetzung ergibt sich eine ebenso gebaute Hauptmatrix $\mathfrak{A}$, die der Schar (A) zugeordnet wird[1]).

Der Zusammenhang zwischen den Hauptmatrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ergibt sich aus den neun Gl. (4). Bezeichnen wir die Elemente in den Hauptmatrizen mit großen deutschen Buchstaben, so wird $\mathfrak{A}$ (und analog $\mathfrak{B}$) von der Form:

$$\mathfrak{A} = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & 0 & 0 & 1 & -\mathfrak{A}_{16} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & 0 & -1 & 0 & \mathfrak{A}_{26} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & -1 & 0 & 0 & \mathfrak{A}_{36} \end{matrix}\right\} \qquad (10).$$

Die Gl. (4) lauten dann:

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{B}_{12} = 0 & -\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{B}_{22} = 0 & \mathfrak{B}_{32} - \mathfrak{A}_{16} = 0 \\ \mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{B}_{11} = 0 & -\mathfrak{A}_{21} - \mathfrak{B}_{21} = 0 & -\mathfrak{B}_{31} - \mathfrak{A}_{26} = 0 \\ \mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{B}_{16} = 0 & -\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{B}_{26} = 0 & -\mathfrak{B}_{36} - \mathfrak{A}_{36} = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (11).$$

Die Hauptmatrix $\mathfrak{B}$ ist also eindeutig aus $\mathfrak{A}$ zu bestimmen:

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{A}_{22} & -\mathfrak{A}_{12} & 0 & 0 & 1 & \mathfrak{A}_{32} \\ -\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{11} & 0 & -1 & 0 & -\mathfrak{A}_{31} \\ -\mathfrak{A}_{26} & \mathfrak{A}_{16} & -1 & 0 & 0 & -\mathfrak{A}_{36} \end{matrix}\right\} \qquad (12).$$

Die Multiplikation der Koordinaten eines der »Hauptkomplexe« mit einem Faktor ist zwar für die Darstellung der betrachteten Regelschar unwesentlich; doch sind die entstehenden Matrizen dann keine Hauptmatrizen, da $\mathfrak{K}_a$ bzw. $\mathfrak{K}_b$ i. a. nicht mehr identisch mit der Spurkurve Δ der Regelschar sind. Es ist ferner wesentlich, daß die Hauptkomplexe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jetzt eine bestimmte Reihenfolge besitzen.

3. Wann läßt sich eine Regelschar durch eine Hauptmatrix darstellen? Wenn die Bedingung (9) erfüllt ist, so gibt es offenbar für die Gl. (2) kein Lösungssystem B_ι, bei dem $B_3 = B_4 = B_5 = 0$ ist, ausgenommen das für unsere Zwecke nicht brauchbare System $B_\iota = 0$ $(\iota = 1, \ldots, 6)$. Aber auch die Umkehrung ist richtig. Wenn es kein derartiges Lösungssystem gibt, d. h. aber, wenn die Schar (B) keinen in III liegenden Strahl enthält[2]), so muß die Determinante (9) $\neq 0$, also eine Transformation auf die Hauptmatrix möglich

[1]) Man beachte aber, daß etwa zur Darstellung der Schar (A) durch das Gleichungssystem $\mathfrak{B}(A) = 0$ die der Schar (B) »zugeordnete Hauptmatrix« $\mathfrak{B}$ verwendet wird, also die Leitmatrix der Schar (A).

[2]) Ein in III liegender Strahl P, der in bezug auf das Fundamentaldreieck dieser Ebene die Linienkoordinaten P'_1, P'_2, P'_3 hat, besitzt die Plückerschen Koordinaten

$$P_1 = P'_2, \quad P_2 = -P'_1, \quad P_3 = 0, \quad P_4 = 0, \quad P_5 = 0, \quad P_6 = P_3'.$$

sein. Da dann auch die Schar (A) keinen Strahl in III haben kann, ist die Existenz der dieser Schar zugeordneten Hauptmatrix ebenfalls sichergestellt.

Bei unseren Betrachtungen zeichneten wir die Fundamentalebene III aus. Deuten wir die Parametertripel $\lambda_\varkappa$ und $\mu_\varkappa$ als projektive Punktkoordinaten in einer anderen Fundamentalebene oder als Ebenenkoordinaten in dem Bündel einer Fundamentalecke, so können wir jedesmal eine dem betreffenden Fundamentalgebilde zugeordnete Hauptmatrix erhalten. Diese acht Hauptmatrizen unterscheiden sich natürlich in ihrer Struktur.

Satz 13. Eine Regelschar läßt sich auf die einer Tetraederebene oder einem Tetraederpunkt zugeordnete »Hauptmatrix« dann und nur dann bringen, wenn sie mit dieser Ebene oder diesem Punkt keinen Strahl gemeinsam hat. Durch geeignete Wahl des Fundamentaltetraeders kann man also i. a. stets die angegebene Schreibweise erzielen.

Eine Ausnahme bilden die Bündel und Felder, die ja auch als Ausartungen von Regelscharen aufzufassen sind. Für ein Bündel lassen sich nach dem Satze nur in bezug auf die Fundamentalebenen, für ein Feld nur in bezug auf die Fundamentalecken Hauptmatrizen angeben.

4. Durch die Einführung der Hauptmatrizen wird die Parameterdarstellung der Regelscharen:

$$A_\iota = a_1 \mathfrak{A}_{1\iota} + a_2 \mathfrak{A}_{2\iota} + a_3 \mathfrak{A}_{3\iota}, \quad B_\iota = b_1 \mathfrak{B}_{1\iota} + b_2 \mathfrak{B}_{2\iota} + b_3 \mathfrak{B}_{3\iota} \quad (\iota = 1, \ldots, 6) \quad (13).$$

Dabei sind die $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ die Koordinaten der Spurpunkte a und b von A und B. Sie müssen der Gleichung der Spurkurve $\sum L(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_\varkappa)\, x_\lambda x_\varkappa = 0$ genügen, für deren Matrix wir eine einfache Schreibweise einführen. Die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden durch neun inhomogene Zahlen charakterisiert. Diese ordnen wir zu zwei den Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugeordneten quadratischen Hauptmatrizen $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{B}^0$ an, indem wir von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die zweite, die mit -1 multiplizierte erste und die mit -1 multiplizierte sechste Kolonne in dieser Reihenfolge zusammenstellen:

$$\begin{Bmatrix} \mathfrak{A}_{12} & -\mathfrak{A}_{11} & -\mathfrak{A}_{16} \\ \mathfrak{A}_{22} & -\mathfrak{A}_{21} & -\mathfrak{A}_{26} \\ \mathfrak{A}_{32} & -\mathfrak{A}_{31} & -\mathfrak{A}_{36} \end{Bmatrix} = \mathfrak{A}^0 \qquad \begin{Bmatrix} -\mathfrak{A}_{12} & -\mathfrak{A}_{22} & -\mathfrak{A}_{32} \\ \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{31} \\ \mathfrak{A}_{16} & \mathfrak{A}_{26} & \mathfrak{A}_{36} \end{Bmatrix} = \mathfrak{B}^0 = -\mathfrak{A}^{0\prime} \quad (14).$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{A}^{0\prime}$ die zu $\mathfrak{A}^0$ transponierte Matrix. Dann wird die Spurkurvenmatrix

$$\{L(\mathfrak{A}_\varkappa, \mathfrak{A}_\lambda)\}_{\lambda, \varkappa = 1,2,3} = \begin{Bmatrix} 2\,\mathfrak{A}_{12} & -\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{16} \\ -\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{22} & -2\,\mathfrak{A}_{21} & -\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{26} \\ \mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{16} & -\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{26} & -2\,\mathfrak{A}_{36} \end{Bmatrix} = \mathfrak{A}^0 - \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{A}^0 + \mathfrak{A}^{0\prime} \quad (15).$$

Multipliziert man in $\mathfrak{A}$ alle Glieder der quadratischen Hauptmatrix mit $k \neq 0$, also auch in $\mathfrak{B}$, so erhält man natürlich andere Regelscharen. Aber diese haben dieselben Spurkurven, weil deren Matrix $= k(\mathfrak{A}^0 + \mathfrak{A}^{0\prime})$ ist.

5. Wenn im speziellen Fall die drei Hauptkomplexe der Matrix $\mathfrak{A}$ ausgeartet sind, d. h. wenn die Komplexkoordinaten der Plückerschen Relation $L(\mathfrak{A}_\varkappa, \mathfrak{A}_\varkappa) = 0$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ genügen und dann besser mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, so muß auch $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$, $A_{36} = 0$ sein:

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{16} \\ 0 & A_{22} & 0 & -1 & 0 & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Die Spurpunkte der drei »Achsen« $A_\varkappa$ sind dann nach (7) die Ecken des Fundamentaldreieckes in III. Wir wollen nun im allgemeinen Fall den Hauptkomplex $\mathfrak{A}_\varkappa$ derjenigen Ecke des Fundamentaldreieckes zuordnen, durch die für den Fall der Ausartung seine Achse gehen muß. Ist umgekehrt eine keinen III-Strahl enthaltende Regelschar so gewählt, daß ihre Spurkurve beispielsweise durch die Ecke $0:0:1$ geht, so ist der zugeordnete Hauptkomplex $\mathfrak{A}_\varkappa$ ausgeartet. Denn durch diesen Punkt muß ja ein Strahl A_3 der A-Schar gehen, dessen Spurpunktskoordinaten nach (7) $A_{35} : -A_{34} : -A_{33} = 0:0:1$ sind. Wählen wir $A_{33} = -1$, so stellt A_3 den dritten Hauptkomplex von $\mathfrak{A}$ dar.

Satz 14. Eine Regelschar sei durch die der Fundamentalebene (oder -ecke) $\varkappa$ zugeordnete Hauptmatrix dargestellt; dann ist einer ihrer Hauptkomplexe dann und nur dann ausgeartet, wenn der durch $\varkappa$ erzeugte Nullriß der Regelschar durch die dem Komplex zugeordnete Ecke des Fundamentaldreieckes in $\varkappa$ (bzw. Ebene des Fundamentaldreiflachs in $\varkappa$) geht.

Da ein nicht in III liegendes Bündel (A) stets Strahlen durch die Ecken des Fundamentaldreiecks in III schickt, so sind die ihm zugeordneten Hauptkomplexe ausgeartet. Ueberdies muß der Rang[1]) der Spurgebietsmatrix 0, also $\mathfrak{A}^0 + \mathfrak{A}^{0'} = \{0\}$ sein, d. h. nach (15)

$$A_{11} = A_{22} \qquad A_{32} = A_{16} \qquad A_{31} = -A_{26}$$

oder zur Abkürzung

$$= \frac{x_4}{x_3} \qquad = -\frac{x_2}{x_3} \qquad = -\frac{x_1}{x_3}.$$

Daher wird nach (16)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \left\{ \begin{matrix} \frac{x_4}{x_3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{x_2}{x_3} \\ 0 & \frac{x_4}{x_3} & 0 & -1 & 0 & \frac{x_1}{x_3} \\ -\frac{x_1}{x_3} & -\frac{x_2}{x_3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Die $x_\varkappa$ sind, wie man leicht bestätigt, die Koordinaten des Bündelpunktes.

7. Die Abbildungsformeln. 1. Es seien $P_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ Linienkoordinaten der in der Fundamentalebene $III = \pi$ liegenden Strahlen in bezug auf das Fundamentaldreieck dieser Ebene. Ist $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_{\varkappa\iota}\}$ $(\varkappa = 1, 2, 3;\ \iota = 1, \ldots 6)$ eine beliebige Matrix vom Range 3, so vermitteln die drei linearen Formen $L(\mathfrak{S}_\varkappa, P) = P_\varkappa'$ oder kurz

$$\mathfrak{S} P = P' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

eine Abbildung der Raumstrahlen auf die der Ebene π, die — wie man leicht bestätigt — allen Grundforderungen genügt. Die durch die Gleichungen $\mathfrak{S}(T) = 0$ bestimmte Regelschar (T) ist das singuläre Gebilde, denn zu jedem T dieser Schar gehören die Bildkoordinaten $0:0:0$. Daß diese Abbildung auf die im 2. Kapitel beschriebene Art hergestellt werden kann, hat Eckhart in der oben erwähnten Arbeit gezeigt[2]). Der Rang der Matrix $\{L(\mathfrak{S}_\varkappa, \mathfrak{S}_\lambda)\}$ ist charakteristisch für die verschiedenen Typen der projizierenden Schar, die im vorigen Kapitel ausführlich besprochen wurden.

Wir wollen zeigen, daß sich auch umgekehrt jede nach den synthetischen Methoden des 2. Kapitels hergestellte Abbildung durch ein Gleichungssystem der Form (17) vermitteln läßt. Es sei $\pi = III$ das Bildfeld einer gegebenen Hauptabbildung. Man bestimme die Hauptmatrix $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_{\varkappa\iota}\}$ der projizierenden Schar (S) in bezug auf die Fundamentalebene III. Das ist möglich, weil die projizierende Schar mit dem Hauptbildfelde keinen Strahl gemeinsam hat. Dann behaupten wir, daß die Gleichungen $\mathfrak{S} P = P'$ der analytische Ausdruck für die gegebene Hauptabbildung sind. Sie stellen, wie eben erwähnt, gewiß eine unserer linearen Abbildungen dar. Für einen π-Strahl P ist, wenn man die spezielle Form der Matrix $\mathfrak{S}$ beachtet, $P_3 = P_4 = P_5 = 0$, also $P_1' = P_2$, $P_2' = -P_1$, $P_3' = -P_6$, d. h. aber $P' = P$[3]). Die Abbildung $\mathfrak{S} P = P'$ ist mithin eine Hauptabbildung, und da überdies nach Voraussetzung ihre durch die Gleichungen $\mathfrak{S}(T) = 0$ bestimmte singuläre Schar mit der singulären Schar der gegebenen Hauptabbildung übereinstimmt, so sind beide Abbildungen identisch. Nimmt man mit dem Hauptbildfeld (P') noch eine Kollineation vor, so erhält man für die neuen Bildkoordinaten allgemeine lineare Formen in den P_ι.

Satz 15. Jede Hauptabbildung auf die Strahlen eines Feldes oder Bündels π läßt sich analytisch durch ein Gleichungssystem $\mathfrak{S} P = P'$ ausdrücken, wobei $\mathfrak{S}$ die Hauptmatrix der projizierenden Schar in bezug auf die Fundamentalebene oder Fundamentalecke π ist.

2. Als Anwendung soll das Hauptbild einer Regelschar (A) ermittelt werden, die keinen π-Strahl enthält. Ihr läßt sich in bezug auf π die Hauptmatrix $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{\varkappa\iota}\}$ zuordnen. Aus ihrer Parameterdarstellung (13) folgt für die Bildkoordinaten eines A-Strahls:

$$A_\varkappa' = L(\mathfrak{S}_\varkappa, A) = a_1 L(\mathfrak{S}_\varkappa, \mathfrak{A}_1) + a_2 L(\mathfrak{S}_\varkappa, \mathfrak{A}_2) + a_3 L(\mathfrak{S}_\varkappa, \mathfrak{A}_3) \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

---

[1]) Man klassifiziert die Regelscharen nach dem Range r der Matrix $\{L(\mathfrak{a}_\varkappa, \mathfrak{a}_\lambda)\}$, in unserem Fall also der Spurkurvenmatrix $\mathfrak{A}^0 + \mathfrak{A}^{0'}$. Für $r = 3$ besteht die Regelschar aus den Strahlen, die drei windschiefe Strahlen treffen. Sie artet aus in zwei Strahlbüschel mit einem gemeinsamen Strahl, wenn $r = 2$, in ein Strahlbüschel, wenn $r = 1$ ist. Für $r = 0$ erhält man als Ausartungen die Strahlen eines Bündels oder Feldes. Vergl Kowalewski, Analyt. Geometrie, § 99.

[2]) Vergl. die Fußnote auf S. 380.

[3]) Vergl. die Fußnote auf S. 395.

Das Bild A' von A erhalten wir also, indem wir den Spurpunkt a von A durch eine Korrelation transformieren, deren Matrix von den $\mathfrak{S}_\varkappa$ und $\mathfrak{A}_\varkappa$ abhängt. Die Bildgesamtheit bildet also i. a. eine Kurve zweiter Klasse. Die Korrelationsmatrix ist [vergl. bei der Berechnung das Gleichungsystem (11)]:

$$\{L(\mathfrak{S}_\varkappa, \mathfrak{A}_\lambda)\}_{\varkappa,\lambda=1,2,3} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{S}_{12}+\mathfrak{A}_{12} & -\mathfrak{S}_{11}+\mathfrak{A}_{22} & -\mathfrak{S}_{16}+\mathfrak{A}_{32} \\ \mathfrak{S}_{22}-\mathfrak{A}_{11} & -\mathfrak{S}_{21}-\mathfrak{A}_{21} & -\mathfrak{S}_{26}-\mathfrak{A}_{31} \\ \mathfrak{S}_{32}-\mathfrak{A}_{16} & -\mathfrak{S}_{31}-\mathfrak{A}_{26} & -\mathfrak{S}_{36}-\mathfrak{A}_{36} \end{Bmatrix} = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{B}^0 = \underline{\mathfrak{S}^0 + \mathfrak{A}^{0'}}.$$

Satz 16. Die Bildgesamtheit (A') einer Regelschar (A) entsteht aus der Spurkurve (a) durch die Korrelation $(A') = \mathfrak{K}(a)$, wobei $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}^0 + \mathfrak{A}^{0'}$ ist und $\mathfrak{S}^0$ und $\mathfrak{A}^0$ die quadratischen Hauptmatrizen der Scharen (S) und (A) sind.

Welches sind im speziellen Fall die Bilder der Scharen (S) und (T)?

$$(S') = \mathfrak{K}_1(s), \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{S}^0 + \mathfrak{S}^{0'}$$
$$(T') = \mathfrak{K}_2(t), \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{S}^0 + \mathfrak{T}^{0'} = \mathfrak{S}^0 - \mathfrak{S}^0 = \{0\}.$$

Die Geraden T' sind also unbestimmt. Dagegen ist $\mathfrak{S}^0 + \mathfrak{S}^{0'}$ eine symmetrische Matrix; sie vermittelt eine Polarität, deren Inzidenzkurve die Matrix $\mathfrak{S}^0 + \mathfrak{S}^{0'}$ hat, also die Spurkurve (s) der Schar (S) ist. Mithin ist das Bild S' von S die Tangente der Spurkurve im Spurpunkt s, übereinstimmend mit früheren Ergebnissen.

Auch ein Bündel (A) ist als Regelschar aufzufassen. Enthält es keinen π-Strahl, so entsteht sein Bildfeld (A') aus seinem Spurfeld (a) durch die Korrelation $\mathfrak{K} = \mathfrak{S}^0 + \mathfrak{A}^{0'}$. Stellt auch $\mathfrak{S}$ ein Bündel, etwa mit den Koordinaten $0:0:1:0$ dar, so daß die Abbildung eine »Zentralprojektion« ist, so wird nach der Schlußbemerkung von **6**,5 $\mathfrak{S}^0 \equiv \{0\}$, also $\mathfrak{S}^0 + \mathfrak{A}^{0'} = \mathfrak{A}^{0'}$ eine antisymmetrische Matrix.

Da die zugehörige Determinante $= 0$ ist, artet die Korrelation aus: Die Bildstrahlen A' der nicht-singulären A-Strahlen gehen durch ein Zentrum a', den »Zentralriß« jenes Bündelpunktes.

8. Die Frage der Eineindeutigkeit. 1. Es soll zunächst untersucht werden, ob sich durch Verwendung zweier Abbildungen Eineindeutigkeit erzielen läßt. Sind (S) und (U) die beiden gegebenen projizierenden Scharen, so können wir i. a. in vielfacher Weise ein gemeinsames Hauptbildfeld oder Hauptbildbündel so wählen, daß es keinen S- oder U-Strahl, also auch keinen singulären T- oder V-Strahl enthält. Nur für den Fall, daß ein projizierendes Bündel und ein projizierendes Feld gekoppelt sind, läßt sich ein gemeinsames Hauptbildgebiet nicht angeben. Diesen Fall, der als Spezialisierung eines im nächsten Kapitel behandelten Typus auftritt, schließen wir deshalb hier aus.

Als Beispiel werde ein Bildfeld $\pi = III$ angenommen. Die beiden Hauptabbildungen seien

$$\mathfrak{S}\,P = P', \qquad \mathfrak{U}\,P = P''.$$

Die Hauptmatrizen der singulären Scharen seien $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{V}$. Läßt man die Plückersche Relation für die P_ι fallen, so stellen diese sechs Gleichungen eine lineare Abbildung des fünfdimensionalen linearen Punktraumes R_5 auf die Elementenpaare von π dar, wobei jeder Punkt des R_5 die homogenen Koordinaten P_ι hat. Diese Abbildung kann also aus Dimensionsgründen nicht eineindeutig sein. Sie ist aber auch nicht eineindeutig, wenn man nur das vierdimensionale, im R_5 enthaltene Gebilde zweiten Grades $L(P, P) = 0$ auf die Elementenpaare von π abbildet.

Ist nämlich ein Bildpaar P', P'' gegeben, so haben wir zunächst alle Systeme P_ι zu suchen, die die sechs linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, P_\varkappa' + L(\mathfrak{S}_\varkappa, P) = 0 \\ \sigma\, P_\varkappa'' + L(\mathfrak{U}_\varkappa, P) = 0 \end{aligned}\right\}_{\varkappa=1,2,3}$$

befriedigen. Dabei sind ϱ und σ ebenfalls noch unbekannt. Die Koeffizientenmatrix hat die Form

$$\mathfrak{M} = \begin{Bmatrix} P_1' & 0 & \mathfrak{S}_{11} & \mathfrak{S}_{12} & 0 & 0 & 1 & \mathfrak{S}_{16} \\ P_2' & 0 & \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_{22} & 0 & -1 & 0 & \mathfrak{S}_{26} \\ P_3' & 0 & \mathfrak{S}_{31} & \mathfrak{S}_{32} & -1 & 0 & 0 & \mathfrak{S}_{36} \\ 0 & P_1'' & \mathfrak{U}_{11} & \mathfrak{U}_{12} & 0 & 0 & 1 & \mathfrak{U}_{16} \\ 0 & P_2'' & \mathfrak{U}_{21} & \mathfrak{U}_{22} & 0 & -1 & 0 & \mathfrak{U}_{26} \\ 0 & P_3'' & \mathfrak{U}_{31} & \mathfrak{U}_{32} & -1 & 0 & 0 & \mathfrak{U}_{36} \end{Bmatrix}.$$

Die durch Uebereinanderschreiben der Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ entstehende Matrix $\mathfrak{D}$ kann keinen kleineren Rang als vier besitzen. Denn wäre ihr Rang gleich drei, so wäre jeder Hauptkomplex von $\mathfrak{S}$ mit dem entsprechenden von $\mathfrak{U}$ identisch; $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}$ sollen aber zwei verschiedene Matrizen sein. Der Rang von $\mathfrak{M}$ kann also — je nach dem Range von $\mathfrak{D}$ und je nach Wahl des Bildpaares — nur die Werte $r = 6,5$ und 4 annehmen. Die Zahl der Unbekannten ist acht, und daher wird jedes fundamentale Lösungssystem [1]) für die P_ι von der Form

$$P_\iota = \lambda_1 A_{1\iota} + \lambda_2 A_{2\iota} \qquad \text{für } r = 6,$$
$$P_\iota = \lambda_1 A_{1\iota} + \lambda_2 A_{2\iota} + \lambda_3 A_{3\iota} \qquad \text{für } r = 5,$$
$$P_\iota = \lambda_1 A_{1\iota} + \lambda_2 A_{2\iota} + \lambda_3 A_{3\iota} + \lambda_4 A_{4\iota} \qquad \text{für } r = 4,$$

wobei die $A_{\varkappa\iota}$ beliebige, linear unabhängige Lösungen für die Unbekannten P_ι sind. Es entspricht also einem Bildpaar P', P'' eine gerade Punktreihe, ein lineares Punktfeld oder ein dreidimensionaler linearer Raum im R_5. Der Schnitt dieser Originalgebilde mit L ergibt ein Punktgebilde zweiten Grades in der betreffenden linearen Mannigfaltigkeit. Liegen im ersten der drei Fälle A_1 und A_2 nicht auf L, so liefert die Gleichung

$$L(P, P) = L(A_1, A_1)\lambda_1^2 + 2\,L(A_1, A_2)\lambda_1\lambda_2 + L(A_2, A_2)\lambda_2^2 = 0$$

zwei Wurzeln für $\lambda_1 : \lambda_2$, die zwei L-Punkte als Originale festlegen: Dem Bildpaar P', P'' entsprechen zwei unter Umständen zusammenfallende Originalstrahlen des Strahlenraumes. Sind A_1 und A_2 selbst L-Punkte, so liegt die ganze Originalpunktreihe des R_5 auf L, wenn $L(A_1, A_2) = 0$ ist: Dann gibt es ein Büschel von Strahlen, die das Bildpaar P', P'' besitzen. Im zweiten Fall ergibt $L(P, P) = 0$ eine quadratische homogene Gleichung für $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ mit der Matrix $\{L(A_\varkappa, A_\lambda)\}$ $\varkappa, \lambda = 1, 2, 3$. Die L-Punkte mit dem Bildpaar P', P'' stellen also im Strahlenraum eine Regelschar dar. Endlich müssen im dritten Fall $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ einer quadratischen Gleichung mit der Matrix $\{L(A_\varkappa, A_\lambda)\}$ $(\varkappa, \lambda = 1, \ldots 4)$ genügen, damit die P_ι-Systeme L-Punkte bedeuten. So erhalten wir die Parameterdarstellung einer linearen Kongruenz als Originalgebilde im Strahlenraum.

Auch geometrisch erkennt man die Möglichkeit dieser vier Fälle. Gehören beispielsweise die Brennlinien der beiden projizierenden Kongruenzen einer Regelschar an, so besitzen sie auch eine Regelschar von Transversalen, die auch in ein Bündel oder Feld ausarten kann. Man denke an den Fall zweier Zentralprojektionen, bei denen der Schnitt der beiden Kongruenzen aus einem Felde besteht, wenn $P' = P''$ ist und durch den »Hauptpunkt« o geht. $\mathfrak{M}$ ist für jedes Bildpaar vom Range sechs, wenn $\mathfrak{D}$ den Rang sechs hat, wenn also die sechs Hauptkomplexe der projizierenden Scharen linear unabhängig sind, oder anders ausgedrückt, wenn es im R_5 keinen in bezug auf beide Abbildungen singulären Punkt gibt. In diesem Fall entspricht jedem Bildpaar entweder ein Strahlenpaar oder Strahlenbüschel.

Gibt es einen und nur einen singulären Punkt im R_5, der überdies auf L liegt und also einen den singulären Scharen gemeinsamen Strahl $T = V$ darstellt, so ist $\mathfrak{D}$ vom Range 5, und es können Kongruenzenpaare auftreten, die eine Regelschar von Transversalen besitzen. $T = V$ gehört jeder $\mathfrak{S}$- und jeder $\mathfrak{U}$-Kongruenz an, ist also als ein Originalstrahl jedes Bildpaares aufzufassen. In diesem Fall läßt sich daher wenigstens für diejenigeng Bildpaare, deren zugehörige Kongruenzen sich nur in zwei Strahlen schneiden, Eineindeutigkeit durch die Festsetzung erzielen, daß P', P'' den von $T = V$ verschiedenen Raumstrahl darstellen soll.

Haben die Scharen (T) und (V) zwei verschiedene Strahlen $T_1 = V_1$ und $T_2 = V_2$ gemein, so sind deren Koordinaten zwei verschiedene Lösungssysteme der Gleichungen $\mathfrak{D}(P) = 0$. $\mathfrak{D}$ ist also vom Range vier. Ist P', P'' so gewählt, daß die zugehörigen Kongruenzen nur zwei Strahlen gemeinsam haben, so müssen diese Strahlen $T_1 = V_1$ und $T_2 = V_2$ sein. Es gibt also Bildpaare, die überhaupt keine nicht-singulären Raumstrahlen darstellen. Dieser Typus sei im folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen.

2. Verwenden wir zur Darstellung des R_5 und des in ihm enthaltenen Gebildes L drei Bildelemente, so müssen diese, ähnlich wie bei den Abbildungen des ersten Kapitels,

[1]) Vergl. Böcher; Einführung in die höhere Algebra, 1910, S. 53 ff.

aus Dimensionsgründen noch einer einschränkenden Bedingung genügen. Die Abbildung werde durch die neun Gleichungen

$$\mathfrak{S} P = P', \qquad \mathfrak{U} P = P'', \qquad \mathfrak{W} P = P'''$$

vermittelt, wobei $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ wieder Hauptmatrizen seien. Ist ein Bildtripel P', P'', P''' gegeben, so erhält man neun Gleichungen

$$L(\mathfrak{S}_\varkappa, P) = \varrho P_\varkappa', \qquad L(\mathfrak{U}_\varkappa, P) = \sigma P_\varkappa'', \qquad L(\mathfrak{W}_\varkappa, P) = \tau P_\varkappa''' \quad {\scriptstyle \varkappa = 1, 2, 3}$$

für die neun Unbekannten P_i, ϱ, σ und τ. Dieses System hat nur dann eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante null ist. Das liefert eine Bedingungsgleichung für die Bilder, die in bezug auf jedes der Systeme $P_\varkappa^{(\alpha)}$ linear und homogen, also von der Form

$$\sum_{\lambda, \mu, \nu = 1}^{3} a_{\lambda\mu\nu} P_\lambda' P_\mu'' P_\nu''' = 0$$

ist. Bei beliebig gewähltem P', P'' muß daher i. a. P''' aus einem wohlbestimmten Gebilde erster Stufe (P'''), in unserem Fall einem Strahlenbüschel, gewählt werden, damit das Bildtripel überhaupt einen Punkt im R_5 darstellt.

Die Koeffizienten $A_\nu = \sum_{\lambda, \mu = 1}^{3} a_{\lambda\mu\nu} P_\lambda' P_\mu''$ der linearen Bedingungsgleichung für die P''' sind Unterdeterminanten achter Ordnung der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems. Sind sie nicht sämtlich null und ist P''' aus dem zulässigen Gebilde (P''') gewählt worden, so gibt es nur einen Originalpunkt P im R_5. Durchläuft P''' die zulässige Mannigfaltigkeit (P'''), so beschreibt der jedesmal zugeordnete Punkt P, wie man aus dem Gleichungssystem erkennt, eine Gerade des R_5. Diese schneidet, falls sie nicht ganz auf L liegt, L in zwei Punkten P_I und P_{II}, denen in (P''') die Elemente P_I''' und P_{II}''' entsprechen mögen. Wollen wir also, daß das Bildtripel einen Punkt auf L, also ein Element des Strahlenraumes darstellt, und haben wir P', P'' bereits beliebig gewählt, so haben wir für P''' nur noch die Wahl zwischen zwei Bildern P_I''' und P_{II}'''.

Sind die $A_\nu = 0$, so braucht P''' keiner Bedingungsgleichung zu genügen, damit das Bildtripel einen Punkt im R_5 darstellt. Ist dann die Koeffizientenmatrix für jedes P''-System vom Range 8, so stellt das Bildtripel stets nur einen Punkt im R_5 dar. Nimmt P''' bei festgehaltenem P', P'' alle Lagen im Bildfeld an, so erfüllt die Gesamtheit der Originalpunkte eine Ebene des R_5. Diese schneidet L wieder in einem Gebilde zweiten Grades, das — in der Ausdrucksweise der Strahlengeometrie — eine Regelschar bedeutet. P''' ist also, damit das Bildtripel auch eindeutig einen L-Punkt darstellt, aus der Gesamtheit der $\mathfrak{W}$-Bilder jener Regelscharstrahlen zu wählen, d. h. aus der Strahlenschar einer Kurve zweiter Klasse.

Ist der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als acht, so entspricht jedem Bildtripel eine mehrdimensionale Punktmannigfaltigkeit im R_5, also auch im allgemeinen mehrere L-Punkte. Eine durch drei projizierende Scharen hergestellte Abbildung des Strahlenraumes ist daher ebenfalls nicht immer eineindeutig, wie auch das Beispiel dreier Zentralprojektionen zeigt.

Sind die Matrizen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$, also die projizierenden Regelscharen gegeben, so kann man nun zwar, wie aus dem Bisherigen folgt, das einem Paar P', P'' zugeordnete Gebiet (P''') bestimmen. Damit ist indessen das Problem keineswegs erschöpft. Denn man wird bemüht sein müssen, allein in der Ebene, also ohne Zuhilfenahme der projizierenden Scharen zu arbeiten. Bei Konstruktionsaufgaben hat man nur das Zeichenfeld π zur Verfügung, und man muß die Abbildungsmittel durch gewisse Fundamentalelemente in π ersetzen; diese Fundamentalelemente zu ermitteln und mit ihrer Hilfe die projektiven Raumaufgaben im Bildgebiet zu lösen, ist die Aufgabe der Untersuchungen, die sich an diese allgemeine Betrachtung anschließen sollen[1]). Eine rein analytische Behandlung der Methoden der darstellenden Geometrie, wie sie Eckhart skizziert, erscheint mir aus den angegebenen Gründen auch so wenig fruchtbar. In der Praxis sind eben bei Lösung rein projektiver Aufgaben die Abbildungsgleichungen in den seltensten Fällen bekannt und auch nicht erforderlich. 644

[1]) Der zweite Teil der Arbeit erscheint im nächsten Heft dieser Zeitschrift.

Über scheinbare Korrelationen und ihr Auftreten in der physiologischen Statistik.

Von E. J. GUMBEL in Heidelberg.

1. Funktionelle und scheinbare Korrelation. Der Korrelationskoeffizient r gibt ein Maß des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie. Bezeichnet man die beiden Variablen mit X und Y, ihre Abweichungen vom arithmetischen Mittel mit x bzw. y, so ist der Korrelationskoeffizient $r(X, Y)$ definiert durch

$$r(X, Y) = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}}.$$

Gehören zu großen Werten der einen Variablen lauter große bzw. kleine Werte der andern, so lauten die Grenzwerte für den Koeffizienten $+1$ bzw. -1. Im Falle der Zusammenhangslosigkeit ist der Koeffizient ex definitione gleich Null.

Sind die korrelierten Variablen selbst wieder Funktionen von anderen, »alten« Variablen, so soll im folgenden von einem funktionellen Koeffizienten gesprochen werden. Auch von ihm gilt, daß im Fall der Zusammenhangslosigkeit der Korrelationskoeffizient Null ist. Falls die sämtlichen alten Variablen untereinander unkorreliert sind, wird der funktionelle Koeffizient ebenfalls gleich Null sein.

Diese Sätze gelten nur unter der Voraussetzung, daß keine der alten Variablen gleichzeitig in den beiden »neuen« korrelierten Variablen vorkommt. Kommt jedoch mindestens eine der alten Variablen in den beiden neuen gleichzeitig vor, so soll diese Koeffizient als funktioneller Koeffizient mit Wiederholung von Variablen bezeichnet werden. In diesem Fall ist, wenn die sämtlichen alten Variablen unkorreliert sind, der funktionelle Koeffizient nicht Null, aus dem einfachen Grund, weil neben den unkorrelierten Variablen zwei korrelierte, nämlich identische Variable auftreten. Die Verknüpfung der unkorrelierten alten Variablen in den neuen kann sogar, um ein extremes Beispiel zu wählen, derart sein, daß die neuen einen Korrelationskoeffizienten gleich Eins aufweisen, wenn nämlich die beiden neuen Variablen identisch oder einander reziprok sind.

Hat man also zwei solche neue Variablen beobachtet und die Korrelation zwischen ihnen numerisch berechnet, so stellen diese Koeffizienten noch kein genügendes Maß des Zusammenhangs dar. Man muß vielmehr beachten, daß hierin eine »scheinbare Korrelation« enthalten ist, welche rein formal durch die funktionelle Verbindung der beiden alten in den neuen Variablen eingeführt wurde. Als scheinbare Korrelation definieren wir die in einem funktionellen Korrelationskoeffizienten mit Wiederholung von Variablen enthaltene Korrelation, welche bestehen bleibt, wenn die sämtlichen »alten« Variablen als unkorreliert angesehen werden. Bei einem funktionellen Koeffizienten ohne Wiederholung von Variablen ist diese scheinbare Korrelation gleich Null, d. h. sie existiert nicht. Zur Berechnung der scheinbaren Korrelation muß der funktionelle Koeffizient durch die in ihm enthaltenen ursprünglichen Korrelationen zwischen den alten Variablen und die mittleren Fehler dieser Größen ausgedrückt werden. Der Wert, der übrig bleibt, wenn diese Koeffizienten sämtlich gleich Null gesetzt werden, ist dann die scheinbare Korrelation.

Im folgenden soll die physiologisch interessante scheinbare Korrelation berechnet werden, welche entsteht, wenn eine Variable X_ι mit einem Produkt und mit einer Summe von ν ($\nu = 1, 2, i, n$) mit den Exponenten k_ν versehenenen Variablen X_ν korreliert wird. Die Variable X_i wird im folgenden die ausgezeichnete Variable genannt. Die Exponenten k_ν werden als die Gewichte bezeichnet. Der funktionelle Koeffizient wird im folgenden mit ϱ, die scheinbare Korrelation mit ${}_0\varrho$ bezeichnet.

Ist das Gewicht der ausgezeichneten Variablen gleich null, worunter auch zu verstehen ist, daß diese mit keiner anderen Variablen identisch ist, so liegt eine funktionelle Korrelation ohne Wiederholung von Variablen vor. Ist dagegen das Gewicht der ausgezeichneten Variablen nicht gleich null oder die ausgezeichnete Variable mit einer anderen identisch, so haben wir eine funktionelle Korrelation mit Wiederholung von Variablen.

Es sollen nun die funktionellen Korrelationskoeffizienten

$$\varrho\left(X_\iota;\, \Pi X_\nu^{k_\nu}\right) \quad \text{und} \quad \varrho\left(X_\iota,\, \Sigma X_\nu^{k_\nu}\right)$$

durch die ursprünglichen Korrelationen $r_{\varkappa\lambda}$ zwischen den mit den Indices $\varkappa$ und λ versehenen Variablen und durch die Schwankungen bzw. mittleren Fehler dieser Variablen

ausgedrückt werden. Unter der Schwankung v_ν wird dabei der mittlere Fehler μ_ν dividiert durch das arithmetische Mittel M_ν der Variablen X_ν verstanden.

2. Die Schwankung der Summe und des Produkts von Variablen. Zunächst werden wir die Schwankungen der neuen Variablen $\prod_1^n X_\nu^{k_\nu}$ und $\sum_1^n X_\nu^{k_\nu}$ auf die Schwankungen v_ν der alten Variablen X_ν zurückführen. Die Schwankungen der beiden neuen Variablen sollen mit $V(\Pi X_\nu^{k_\nu})$ und $V(\Sigma X_\nu^{k_\nu})$ bezeichnet werden. Zu ihrer Berechnung brauchen wir den Mittelwert $\mathfrak{M}_1$ und den mittleren Fehler σ_1 von $\Pi X_\nu^{k_\nu}$ bezw. den Mittelwert $\mathfrak{M}_2$ und den mittleren Fehler σ_2 von $\Sigma X_\nu^{k_\nu}$.

Man habe die n Variablen $X_1, X_2, X_\nu \ldots X_n$, bilde einen Ausdruck $f(X_1, X_2, X_n)$, bezeichne die Glieder in der Taylorentwicklung dieser Funktion mit $f, f_\nu, f_{\nu\nu}, f_{\varkappa\lambda}$, dann ist unter der Annahme, daß die mathematischen Erwartungen der dritten und höheren Potenzen der Fehler gegenüber dem Mittelwert verschwinden, nach Czuber[1]) der Mittelwert $\mathfrak{M}$ dieser Funktion gegeben durch

$$\mathfrak{M} = f + {}^1/_2 \Sigma f_{\nu\nu} \mu_\nu^2 + \Sigma f_{\varkappa\lambda} \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei die erste Summe von 1 bis n, die zweite über alle untereinander verschiedenen Werte von $\varkappa$ und λ zu nehmen ist.

Für die neue Variable $\Pi X_\nu^{k_\nu}$ ist

$$f = \Pi M_\nu^{k_\nu}; \quad f_\nu = \frac{k_\nu}{M_\nu} f; \quad f_{\nu\nu} = \frac{k_\nu (k_\nu - 1)}{M_\nu^2} f; \quad f_{\varkappa\lambda} = \frac{k_\varkappa k_\lambda}{M_\varkappa M_\lambda} f \quad \ldots \quad (2)$$

also wird
$$\mathfrak{M}_1 = \Pi M_\nu^{k_\nu} [1 + {}^1/_2 \Sigma k_\nu (k_\nu - 1) v_\nu^2 + \Sigma k_\varkappa k_\lambda v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}].$$

Nach den Formeln von Czuber ergibt sich ferner auf Grund der gleichen Annahme für den mittleren Fehler σ^2 der Variablen $f(X_1, X_2, X_n)$

$$\sigma^2 = \Sigma f_\nu^2 \mu_\nu^2 + 2 \Sigma f_\varkappa f_\lambda \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Daher wird
$$\sigma_1^2 = \Pi M_\nu^{2k_\nu} (\Sigma k_\nu^2 v_\nu^2 + 2 \Sigma k_\varkappa k_\lambda v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}),$$

also gilt für die Schwankung von $\Pi X_\nu^{k_\nu}$

$$V^2 (\Pi X_\nu^{k_\nu}) = \frac{\Sigma k_\nu^2 v_\nu^2 + 2 \Sigma k_\varkappa k_\lambda v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}}{[1 + {}^1/_2 \Sigma k_\nu (k_\nu - 1) v_\nu^2 + \Sigma k_\varkappa k_\lambda v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}]^2} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Die Schwankung eines Produktes läßt sich also auf die Schwankungen der einzelnen Variablen zurückführen. Da nun die Schwankungen bei Variablen von verschiedenen Größenordnungen im allgemeinen von der gleichen Größenordnung sind, hat die Größenordnung der verschiedenen Variablen auf die Schwankung ihres Produktes keinen Einfluß.

Sind speziell sämtliche Gewichte k_ν gleich 1, so ergibt sich die Schwankung eines Produktes von n Variablen aus

$$V^2 (\Pi X_\nu) = \frac{\Sigma v_\nu^2 + 2 \Sigma v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}}{(1 + \Sigma v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda})^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Im allgemeinen sind die Schwankungen v_ν maximal von der Größenordnung 10 vH. Man wird daher besonders bei mäßigen Korrelationen und einer geringen Zahl von Variablen die Summe im Nenner gegenüber dem Faktor 1 vernachlässigen können. Sind bei geringen Schwankungen und bei geringer Zahl von Variablen die sämtlichen Korrelationen gleich 1, so gilt
$$V(\Pi X_\nu) = \Sigma v_\nu.$$

Die Schwankung eines Produktes von vollständig korrelierten Variablen ist angenähert gleich der Summe der Schwankungen der einzelnen Variablen. Die Schwankung der n-ten Potenz einer Variablen ist also gleich der n-fachen Schwankung dieser Variablen. Die Schwankung eines Produktes von vollständig korrelierten Variablen nimmt proportional mit der Zahl der Variablen zu.

Sind dagegen die sämtlichen Korrelationen gleich 0, so wird
$$V^2 (\Pi X_\nu) = \Sigma v_\nu^2.$$

Das Quadrat der Schwankung eines Produktes von unkorrelierten Variablen ist gleich der Summe der Quadrate der Schwankungen dieser Variablen. Die Schwankung eines Produktes von unkorrelierten Variablen, deren Schwankungen von derselben Größenordnung sind, nimmt also nur mit der Wurzel aus der Zahl der Faktoren zu. Hieraus ergibt sich z. B. die in der Anthropometrie bekannte große Schwankung des Schädelinhaltes. Denn dieser ist

[1]) E. Czuber, Statistische Forschungsmethoden, S. 150 und 151, L. W. Seidel, Wien 1921.

als ein Produkt von entsprechend gewählter Schädellänge, -breite und -höhe aufzufassen und hat daher eine etwas größere Schwankung als jeder dieser voneinander ziemlich unabhängigen Größen.

Ist andererseits $k_1 = -n$, $k_2 = 1$ und alle anderen Gewichte gleich Null, so gilt für die Schwankung des so entstehenden Quotienten X_2/X_1^n

$$V^2\left(\frac{X_2}{X_1^n}\right) = \frac{n^2 v_1^2 + v_2^2 - 2\, n\, v_1\, v_2\, r_{12}}{1 + n\,(n+1)\, v_1^2 - n\, v_1\, v_2\, r_{12}}.$$

Also gilt für kleine n und kleine Schwankungen in erster Näherung

$$V^2\left(\frac{X_2}{X_1^n}\right) = n^2 v_1^2 + v_2^2 - 2\, n\, v_1\, v_2\, r_{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Für positive n nimmt die Schwankung des Quotienten mit wachsender Korrelation ab, für negative zu. Im Fall der vollständigen Korrelation zwischen X_1 und X_2 wird

$$V\left(\frac{X_2}{X_1^n}\right) = n\, v_1 \mp v_2 \text{ je nachdem } r = \pm 1.$$

Genau entsprechend wie (4) ergibt sich auch die Schwankung einer Summe. Hier ist

$$f = \Sigma M_\nu^{k_\nu};\quad f_\nu = k_\nu M_\nu^{k_\nu - 1};\quad f_{\nu\nu} = k_\nu (k_\nu - 1)\, M_\nu^{k_\nu - 2};\quad f_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

also wird nach (1)

$$\mathfrak{M}_2 = \Sigma M_\nu^{k_\nu} + {}^1/_2\, \Sigma k_\nu (k_\nu - 1)\, M_\nu^{k_\nu - 2} \mu_\nu^2$$

und nach (3) $\sigma_2^2 = \Sigma k_\nu^2 M_\nu^{2k_\nu - 2} \mu_\nu^2 + 2\, \Sigma k_\varkappa k_\lambda M_\varkappa^{k_\varkappa - 1} M_\lambda^{k_\lambda - 1} \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda}$,

also gilt für die Schwankung einer Summe

$$V^2(\Sigma X_\nu^{k_\nu}) = \frac{\Sigma k_\nu^2 M_\nu^{2k_\nu} v_\nu^2 + 2\, \Sigma k_\varkappa k_\lambda M_\varkappa^{k_\varkappa} M_\lambda^{k_\lambda} v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}}{[\Sigma M_\nu^{k_\nu} + {}^1/_2\, \Sigma k_\nu (k_\nu - 1)\, M_\nu^{k_\nu} v_\nu^2]^2} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Hier treten also im Gegensatz zu (4) neben den Schwankungen auch die Mittelwerte selbst auf.

Sind speziell sämtliche Gewichte gleich 1, so gilt für die Schwankung einer Summe

$$V^2(\Sigma X_\nu) = \frac{\Sigma \mu_\nu^2 + 2\, \Sigma \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda}}{(\Sigma M_\nu)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Die Schwankung einer Summe führt also nicht auf die Schwankungen der Summanden, sondern auf deren mittlere Fehler. Diese sind aber für verschieden große Variable verschieden. Hier kommt es also im Gegensatz zum Produkt auf die Größenordnung der einzelnen Variablen an. Existiert z. B. eine Variable, welche so groß ist, daß dem Quadrat ihres Mittelwerts gegenüber die anderen Quadrate vernachlässigt werden dürfen, so wird man eine ähnliche Vernachlässigung auch für die mittleren Fehler annehmen dürfen, und man hätte, wenn diese ausgezeichnete Variable mit dem Index i bezeichnet wird

$$V(\Sigma X_\nu) = v_i,$$

d. h. die Schwankung der Summe wäre gleich der Schwankung dieser ausgezeichneten Variablen. Sind sämtliche Korrelationen gleich 1, so wird

$$V(\Sigma X_\nu) = \frac{\Sigma \mu_\nu}{\Sigma M_\nu} = \frac{\Sigma v_\nu M_\nu}{\Sigma M_\nu},$$

d. h. die Schwankung einer Summe von vollständig korrelierten Variablen ist gleich dem mit den arithmetischen Mitteln der einzelnen Variablen als Gewichten berechneten arithmetischen Mittel aus den einzelnen Schwankungen. Die Schwankung einer Summe ist also wieder von der Größenordnung der Schwankung eines der Faktoren. Für die Schwankung spielt es also keine große Rolle, ob man eine Länge insgesamt oder nur eine Teillänge mißt, wenn Ganzes und Teil hochkorreliert sind. Sind die sämtlichen Variablen identisch, so ist die Schwankung des n-fachen Wertes einer Variablen gleich der Schwankung dieser Variablen. Sind dagegen sämtliche Variablen unkorreliert, so ist

$$V^2(\Sigma X_\nu) = \frac{\Sigma \mu_\nu^2}{(\Sigma M_\nu)^2}.$$

Sind außerdem sämtliche Schwankungen angenähert gleich, so wird angenähert

$$V^2(\Sigma X_\nu) = \frac{v^2\, \Sigma M_\nu^2}{(\Sigma M_\nu)^2}.$$

Sind ferner sämtliche Mittelwerte untereinander gleich, so wird

$$V^2(\Sigma X_\nu) = \frac{v^2}{n}.$$

Die Schwankung einer Summe von n unkorrelierten Variablen von derselben Größenordnung nimmt also mit der Wurzel dieser Anzahl ab. Die Schwankung einer Summe verhält sich also ganz anders als die Schwankung eines Produktes.

3. Die scheinbare Korrelation zwischen einer Variablen und einem Produkt von Variablen. Wir kehren nunmehr zum Problem der Berechnung der Korrelation zwischen einer ausgezeichneten Variablen X_ι und einem Produkt $\Pi X_\nu^{k_\nu}$ bzw. einer Summe $\Sigma X_\nu^{k_\nu}$ zurück. Dieses Problem ist in einer früheren Arbeit[1]) bereits für einen allgemeineren Fall gelöst.

Bildet man aus den n Variabeln $X_1, X_2, \ldots X_n$ zwei Funktionen $Z = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ und $Z_1 = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$, so ist der Korrelationskoeffizient zwischen Z und Z_1 unter der Annahme, daß die mathematischen Erwartungen der dritten und höheren Potenzen der Fehler gegenüber ihren Mittelwerten verschwinden, auf Grund der Definition dieses Koeffizienten und der Formeln (1) und (3)

$$\varrho(Z, Z_1) = \frac{\Sigma \mu_\nu^2 g_\nu f_\nu + \Sigma \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda} (f_\varkappa g_\lambda + f_\lambda g_\varkappa)}{\sqrt{(\Sigma f_\nu^2 \mu_\nu^2 + 2 \Sigma f_\varkappa f_\lambda \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda})(\Sigma g_\nu^2 \mu_\nu^2 + 2 \Sigma g_\varkappa g_\lambda \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda})}}.$$

Darin bedeuten f_ν und g_ν die Glieder in der Taylorentwicklung von Z und Z_1. In den beiden vorliegenden Fällen ist nun $Z = X_i$, daher ist $g_\iota = 1$; $g_\nu = 0$ für $\nu \neq i$, also wird

$$\varrho(X_\iota . Z) = \frac{\mu_\iota f_\iota + \Sigma \mu_\nu f_\nu r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma f_\nu^2 \mu_\nu^2 + 2 \Sigma f_\varkappa f_\lambda \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda}}} \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Diese Formel erlaubt aus der Kenntnis der Natur der Funktion $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ und den numerischen Werten der ursprünglichen Korrelationen den Wert der Korrelation zwischen der ausgezeichneten Variablen X_i und der Funktion $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ zu berechnen. Die mittleren Fehler der Variablen müssen bei der Berechnung der ursprünglichen Korrelationen sowieso berechnet werden. Die Formel spart also eine Menge numerischer Arbeit. Sie kann andrerseits auch zur Kontrolle für bereits vorliegende Rechnungen dienen. Die in ihr auftretenden Fehler sind gering. Vernachlässigungen der Quadrate und höheren Potenzen der Fehler gegenüber den Mittelwerten sind allgemein üblich.

Ist die neue Variable Z homogen in bezug auf sämtliche alte Variablen X_ν und sind diese alle von derselben Größenordnung, d. h. ihre Mittelwerte angenähert gleich, so sind alle f_ν einander gleich und die Korrelation wird angenähert

$$\varrho(X_\iota, Z) = \frac{\mu_\iota + \Sigma \mu_\nu r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma \mu_\nu^2 + 2 \Sigma \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda}}}.$$

Dies gilt unabhängig davon, welches die Beziehung der neuen Variablen Z zu den alten X_ν ist.

Sind andererseits nur sämtliche mittleren Fehler von derselben Größenordnung, was möglich ist, wenn sämtliche Variablen von derselben Größenordnung sind, so wird angenähert

$$\varrho(X_\iota, Z) = \frac{f_\iota + \Sigma f_\nu r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma f_\nu^2 + 2 \Sigma f_\varkappa f_\lambda r_{\varkappa\lambda}}}.$$

Ist die neue Variable Z homogen in bezug auf sämtliche alten Variabeln X_ν und alle Mittelwerte angenähert gleich, und sind außerdem sämtliche mittleren Fehler von der gleichen Größenordnung, so gilt unabhängig davon, welche Form Z hat, angenähert

$$\varrho(X_\iota . Z) = \frac{1 + \Sigma r_{\iota\nu}}{\sqrt{n + 2 \Sigma r_{\varkappa\lambda}}}.$$

Sind endlich sämtliche Korrelationen zwischen den alten Variablen X_ν gleich $+1$, so wird auch die Korrelation $\varrho(X_\iota, Z)$ gleich $+1$.

Der Fall, daß sämtliche Korrelationen zwischen den alten Variablen gleichzeitig gleich -1 sind, ist unmöglich, da z. B. die negativ vollkommene Korrelation der aus-

[1]) »Ueber die bei Funktionen von Variablen auftretende Korrelation«, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 3, H. 5, S. 396—398.

gezeichneten Variablen mit allen anderen Variablen eine positiv vollkommene Korrelation dieser anderen Variablen untereinander bedingt. Sind aber unter den bei $\mathfrak{n}$ alten Variablen auftretenden $\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)}{2}$ Korrelationskoeffizienten die sämtlichen $\mathfrak{n}-1$ Korrelationen der ausgezeichneten Variablen mit den anderen Variabeln gleich -1, was die Höchstzahl der negativ vollkommenen Koeffizienten bedeutet, so sind die übrigen $\frac{(\mathfrak{n}-1)(\mathfrak{n}-2)}{2}$ Koeffizienten gleich $+1$. Dann wird, wenn die neue Variable Z homogen in bezug auf alle alten Variablen und alle Mittelwerte und mittleren Fehler von der gleichen Größenordnung sind, in der eben abgeleiteten Formel

$$\Sigma r_{\iota\nu} = 1 - \mathfrak{n}$$

und

$$\Sigma r_{\varkappa\lambda} = -\mathfrak{n} + 1 + \frac{(\mathfrak{n}-1)(\mathfrak{n}-2)}{2}$$

$$= {}^1/_2 (\mathfrak{n}-1)(\mathfrak{n}-4) = {}^1/_2 (\mathfrak{n}^2 - 5\,\mathfrak{n} + 4).$$

Daher wird

$$\varrho(X_\iota, Z) = \frac{2-\mathfrak{n}}{\sqrt{\mathfrak{n}^2 - 4\,\mathfrak{n} + 4}} = -1,$$

weil die Wurzel als mittlerer Fehler stets positiv sein muß.

Dabei kommt es wiederum auf die Form von f nicht an. Im Fall $\mathfrak{n} = 2$ wird, wenn die beiden Variablen mit 1 und 2 bezeichnet werden, bei vollkommen negativer Korrelation

$$\varrho[X_1, f(X_1, X_2)] = \frac{\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2}{\sqrt{\mu_1^2 f_1^2 + \mu_2^2 f_2^2 - 2 f_1 f_2 \mu_1 \mu_2}}$$

$$= \pm 1$$

je nachdem

$$f_1 \mu_1 \gtrless f_2 \mu_2.$$

Mit diesem exceptionellen Fall werden wir uns im folgenden noch zu beschäftigen haben.

Die in diesen funktionellen Koeffizienten mit Wiederholung von Variablen enthaltene scheinbare Korrelation beträgt im allgemeinen Fall entsprechend (10)

$$_0\varrho(X_\iota, Z) = \frac{\mu_\iota f_\iota}{\sqrt{\Sigma f_\nu^2 \mu_\nu^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Ist f homogen in bezug auf sämtliche Variable X_ν und sind sämliche mittlere Fehler von derselben Größenordnung, so ist angenähert

$$_0\varrho(X_\iota, Z) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

d. h. die scheinbare Korrelation fällt umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der Zahl der Variablen. Dies ist verständlich: Je mehr Variable vorkommen, desto geringer ist der Einfluß der ausgezeichneten Variablen. Interessant ist, daß es dabei auf die Form der Funktion f garnicht ankommt. Der Wert der scheinbaren Korrelation läßt sich nun weder aus dem numerischen Wert des Koeffizienten $\varrho(X_\iota, Z)$ noch aus den ursprünglichen Beobachtungen, sondern nur mit Hilfe der Formel (11) berechnen. Hierin beruht der Wert unserer Ableitnng.

Speziell ergibt sich für die Korrelation einer ausgezeichneten Variabeln X_ι mit einem Produkt $\Pi X_\nu^{k_\nu}$, wenn man die Werte (2) in (10) einsetzt

$$\varrho(X_i, \Pi X_\nu^{k_\nu}) = \frac{\mu_\iota \frac{k_\iota}{M_\iota} f + f \Sigma \mu_\nu \frac{k_\nu}{M_\nu} r_{\iota\nu}}{\sqrt{f^2 \Sigma \mu_\nu^2 \frac{k_\nu^2}{M_\nu^2} + 2 f^2 \Sigma \frac{k_\varkappa k_\lambda}{M_\varkappa M_\lambda} \mu_\varkappa \mu_\lambda r_{\varkappa\lambda}}}.$$

Führt man wiederum die Schwankungen v_ν ein, so wird

$$\varrho(X_\iota, \Pi X_\nu^{k_\nu}) = \frac{v_\iota k_\iota + \Sigma v_\nu k_\nu r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma v_\nu^2 k_\nu^2 + 2 \Sigma v_\varkappa v_\lambda k_\varkappa k_\lambda r_{\varkappa\lambda}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13).$$

Da die mittleren Fehler in dieser Formel überhaupt nicht auftreten, spielt bei dieser funktionellen Korrelation die absolute Größe der ursprünglichen Variablen keine Rolle. Sind sämtliche ursprünglichen Korrelationen gleich 0, so beträgt die übrig bleibende scheinbare Korrelation

$$_0\varrho(X_\iota, \Pi X_\nu^{k_\nu}) = \frac{v_\iota k_\iota}{\sqrt{\Sigma v_\nu^2 k_\nu^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Sind sämtliche Gewichte gleich 1, so ist die Korrelation zwischen einer au gezeichneten Variablen X_ι und einem Produkt ΠX_ν

$$\varrho(X_\iota, \Pi X_\nu) = \frac{v_\iota + \Sigma v_\nu r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma v_\nu^2 + 2 \Sigma v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}}}.$$

Sind sämtliche Schwankungen von derselben Größenordnung und sind sämtlic Gewichte einander gleich, so ist angenähert

$$\varrho(X_\iota, \Pi X_\nu) = \frac{1 + \Sigma r_{\iota\nu}}{\sqrt{n + 2 \Sigma r_{\varkappa\lambda}}}.$$

Sind sämtliche ursprünglichen Koeffizienten positiv, so ist auch der funktionell Koeffizient zwischen einer ausgezeichneten Variablen und einem Produkt von Variable positiv. Sind sämtliche ursprünglichen Koeffizienten gleich 1, so ist auch dieser funktionell Koeffizient gleich 1.

Ist das Gewicht der ausgezeichneten Variablen gleich 0 und sind alle andere Gewichte einander gleich, so wird die Korrelation zwischen einer Variablen und eine Produkt, in dem diese Variable nicht vorkommt

$$\varrho(X_\iota, \Pi X_\nu) = \frac{\Sigma v_\nu r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma v_\nu^2 + 2 \Sigma v_\varkappa v_\lambda r_{\varkappa\lambda}}},$$

wobei die Summen über alle Werte von ν mit Ausnahme von ι zu nehmen sind.

Im Spezialfall $k_1 = -n$; $k_2 = 1$; $k_\nu = 0$; $\nu \neq 1,2$ wird

$$\varrho\left(X_\iota, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = \frac{v_2 r_{2i} - n v_1 r_{1i}}{\sqrt{n^2 v_1^2 + v_2^2 - 2 n v_1 v_2 r_{12}}} \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Dieser Korrelationskoeffizient hängt also nur von den drei Korrelationskoeffiziente r_{12}, r_{1i}, r_{2i} und den beiden Schwankungen v_1 und v_2, nicht aber von der Schwankung v_i ab Sind die sämtlichen Korrelationen zwischen den alten Variablen gleich null, worunter auc zu verstehen ist, daß X_i mit keiner der beiden anderen Variablen identisch ist, so ist auc dieser funktionelle Koeffizient gleich null. Für $n = 0$ ist natürlich $\varrho(X_1, X_2) = r_{2i}$. Fü wachsende positive n strebt $\varrho\left(X_\iota, \frac{X_2}{X_1^n}\right)$ nach $-r_{1i}$, für wachsende negative nach r_{1i}.

Aus (15) ergeben sich zwei funktionelle Koeffizienten mit Wiederholung vo Variablen als Spezialfälle. Setzt man nämlich $X_i = X_1$, so wird $r_{1i} = 1$ und $r_{2i} = r_{1}$ Daher wird, wenn $r_{12} = r$ gesetzt wird,

$$\varrho\left(X_1, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = \frac{v_2 r - n v_1}{\sqrt{n^2 v_1^2 + v_2^2 - 2 n v_1 v_2 r}} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Je größer n, desto mehr nähert sich dieser funktionelle Koeffizient dem Werte -1 je größer $-n$ dem absoluten Betrag nach, desto mehr nähert er sich dem Werte $+1$ Dem liegt natürlich zugrunde, daß die Korrelation zwischen X_1 und X_1^{-n} bei positivem gleich -1, bei negativem n $+1$ ist und daß dieser Einfluß mit wachsendem n de Einfluß der Korrelation zwischen X_1 und X_2 überkompensiert.

Die zu den Grenzwerten $r = +1$, bzw. $r = -1$ gehörigen Werte des funktionelle Koeffizienten $\varrho\left(X_1, \frac{X_2}{X_1^n}\right)$ ergeben sich aus der Bedingung, daß das Vorzeichen der Wurzel die ja ein mittlerer Fehler ist, stets positiv sein muß nach folgender Tabelle:

	$\varrho\left(X_1, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = 1$	$\varrho\left(X_1, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = -1$
$r = +1$	$n \leqq 0$ oder $n > 0$ und $v_2 > v_1 n$	$n > 0$ und $v_2 < v_1 n$
$r = -1$	$n < 0$ und $v_2 < v_1 \lvert n \rvert$	$n \geqq 0$ oder $n < 0$ und $v_2 > v_1 \lvert n \rvert$

Der seitliche Kopf der Tabelle enthält die beiden Grenzwerte von r, der obere die zugehörigen Grenzwerte des funktionellen Koeffizienten, die Tabellenhäuser die hierzu notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Man sieht, daß das Vorzeichen des funktionellen Koeffizienten keineswegs mit dem Vorzeichen des in ihm enthaltenen ursprünglichen Koeffizienten übereinstimmt.

Setzt man andererseits in (15) $X_i = X_2$, so wird $r_{2i} = 1$ und $r_{13} = r$.

Daher wird
$$\varrho\left(X_2, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = \frac{v_2 - n\, v_1\, r}{\sqrt{n^2 v_1^2 + v_2^2 - 2\, n\, v_1\, v_2\, r}} \quad \ldots\ldots\ldots (17).$$

Je größer n, desto mehr nähert sich dieser funktionelle Koeffizient dem Wert $-r$, je größer $-n$ dem absoluten Betrag nach, desto mehr nähert er sich dem Wert $+r$, weil in beiden Fällen der Wert von X_1^n den Wert des mit ihm verbundenen Faktors X_2 überwiegt.

Die zu den Grenzwerten $r = \pm 1$ gehörigen Werte des funktionellen Koeffizienten ergeben sich nach folgender Tabelle, die wie die erste zu lesen ist.

	$\varrho\left(X_2, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = 1$	$\varrho\left(X_2, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = -1$
$r = +1$	$n \leq 0$ oder $n > 0$ und $v_2 > n\, v_1$	$n > 0$ und $v_2 < n\, v_1$
$r = -1$	$n \geq 0$ oder $n < 0$ und $v_2 > \lvert n \rvert\, v_1$	$n < 0$ und $v_2 < \lvert n \rvert\, v_1$

Man sieht, daß das Vorzeichen des funktionellen Koeffizienten keineswegs mit dem Vorzeichen des in ihm enthaltenen Koeffizienten übereinstimmt.

Die zu diesen funktionellen Korrelationen mit Wiederholung von Variablen gehörenden scheinbaren Korrelationen betragen
$${}_0\varrho\left(X_1, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = \frac{-v_1\, n}{\sqrt{n^2 v_1^2 + v_2^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$
und
$${}_0\varrho\left(X_2, \frac{X_2}{X_1^n}\right) = \frac{v_2}{\sqrt{n^2 v_1^2 + v_2^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Die scheinbare Korrelation (18) ist positiv für $n \leq -1$ und negativ für $n \geq +1$. Bei $n = 0$ ist sie natürlich gleich 0. Sie geht wie die funktionelle Korrelation (16) mit wachsendem n nach -1 und mit fallendem n nach $+1$. Bei endlichem n ist sie stets kleiner als 1, wie es auch sein muß. Das negative Vorzeichen bei positivem n liegt wieder an demselben Umstand, wie oben bei den funktionellen Korrelationskoeffizienten selbst. Die scheinbare Korrelation (19) ist stets positiv. Bei $n = 0$ ist sie 1, da sie hier eine Korrelation zwischen identischen Variablen darstellt. Mit dem absoluten Betrag nach wachsenden n geht sie gegen 0.

4. Die scheinbare Korrelation zwischen einer Variablen und einer Summe von Variablen. Bei der Korrelation zwischen einer ausgezeichneten Variablen X_ι und einer Summe $\Sigma X_\nu^{k_\nu}$ ergibt sich, wenn man die Werte (7) in (10) einsetzt,
$$\varrho\left(X_\iota, \Sigma X_\nu^{k_\nu}\right) = \frac{\mu_\iota\, k_\iota\, M_\iota^{k_\iota - 1} + \Sigma\, \mu_\nu\, r_{\iota\nu}\, k_\nu\, M_\nu^{k_\nu - 1}}{\sqrt{\Sigma\, k_\nu^2\, \mu_\nu^2\, M_\nu^{2k_\nu - 2} + 2\, \Sigma\, k_\varkappa\, k_\lambda\, \mu_\varkappa\, \mu_\lambda\, M_\varkappa^{k_\varkappa - 1}\, M_\lambda^{k_\lambda - 1}\, r_{\varkappa\lambda}}},$$
führt man hierin wieder die Schwankungen ein, so wird
$$\varrho\left(X_\iota, \Sigma X_\nu^{k_\nu}\right) = \frac{k_\iota\, v_\iota\, M_\iota^{k_\iota} + \Sigma\, k_\nu\, v_\nu\, r_{\iota\nu}\, M_\nu^{k_\nu}}{\sqrt{\Sigma\, k_\nu^2\, v_\nu^2\, M_\nu^{2k_\nu} + 2\, \Sigma\, k_\varkappa\, k_\lambda\, v_\varkappa\, v_\lambda\, M_\varkappa^{k_\varkappa}\, M_\lambda^{k_\lambda}\, r_{\varkappa\lambda}}} \quad \ldots\ldots (20).$$

Setzt man sämtliche ursprünglichen Koeffizienten gleich 0, so beträgt die übrigbleibende scheinbare Korrelation
$${}_0\varrho\left(X_\iota, \Sigma X_\nu^{k_\nu}\right) = \frac{k_\iota\, v_\iota\, M_\iota^{k_\iota}}{\sqrt{\Sigma\, k_\nu^2\, v_\nu^2\, M_\nu^{2k_\nu}}} \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

Sind sämtliche Gewichte gleich 1, so ist die Korrelation zwischen einer ausgezeichneten Variablen und einer Summe
$$\varrho\left(X_\iota, \Sigma X_\nu\right) = \frac{\mu_\iota + \Sigma\, \mu_\nu\, r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma\, \mu_\nu^2 + 2\, \Sigma\, \mu_\varkappa\, \mu_\lambda\, r_{\varkappa\lambda}}} \quad \ldots\ldots\ldots (22).$$

Die Formel ist im Gegensatz zu den obigen Formeln (13) bis (19) exakt, weil hier in der Taylorentwicklung die zweiten und höheren Differentialquotienten verschwinden. Ferner treten hier im Gegensatz zu oben nicht die Schwankungen, sondern die mittleren Fehler selbst auf. Die Größenordnung der Variablen spielt also hier eine Rolle. Sind z. B. die sämtlichen Variablen von derselben Größenordnung, so können auch sämtliche

mittleren Fehler gleich sein und man hätte, wenn die sämtlichen Gewichte einander gleich sind, genau wie oben beim Produkt

$$\varrho\,(X_\iota,\,\Sigma X_\nu) = \frac{1 + \Sigma\, r_{\iota\nu}}{\sqrt{n + 2\,\Sigma\, r_{\varkappa\lambda}}} = \varrho\,(X_\iota,\,\Pi\, X_\nu).$$

Sind sämtliche ursprünglichen Koeffizienten positiv, so ist auch der funktionelle Koeffizient (20) positiv. Sind sämtliche ursprünglichen Korrelationen gleich 1, so ist die Korrelation zwischen einer ausgezeichneten Variablen und einer Summe von vollständig korrelierten Variablen selbst gleich 1.

Die scheinbare Korrelation zwischen einer ausgezeichneten Variablen und einer Summe von Variablen beträgt

$$_0\varrho\,(X_\iota,\,\Sigma X_\nu) = \frac{\mu_\iota}{\sqrt{\Sigma\,\mu_\nu^2}} \qquad (23),$$

ist also stets positiv. Je größer die ausgezeichnete Variable gegenüber den anderen Variablen ist, desto größer ist diese scheinbare Korrelation. Verschwinden ihr gegenüber die anderen Variablen, so geht die scheinbare Korrelation gegen Eins. Ist dagegen das Gewicht der ausgezeichneten Variablen Null und alle anderen Gewichte gleich Eins, so wird die Korrelation zwischen einer Variablen und einer Summe, in der diese Variable nicht vorkommt

$$\varrho\,(X_\iota,\,\Sigma X_\nu) = \frac{\Sigma\,\mu_\nu\, r_{\iota\nu}}{\sqrt{\Sigma\,\mu_\nu^2 + 2\,\Sigma\,\mu_\varkappa \mu_\lambda\, r_{\varkappa\lambda}}},$$

wobei die Summen über alle Werte von ν mit Ausnahme des Wertes i zu nehmen sind.

5. Anwendung auf ein physiologisches Problem. Die Berechnung von scheinbaren funktionellen Korrelationskoeffizienten hat eine Bedeutung für die Physiologie.

Es sei L die Körperlänge, Q eine fiktive Körperquerschnittsfläche, definiert durch die Forderung, daß L mal Q mal der Dichte des Körpers gleich dem Körpergewicht ist. Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt, daß die Körperdichte konstant sei. Dann interessiert die Physiologie der korrelative Zusammenhang zwischen L und der neuen Variablen $\frac{Q}{L^n}$ und der ähnlich gebaute Zusammenhang zwischen Q und $\frac{Q}{L^n}$. Setzt man $L = X_1$ und $Q = X_2$ und alle anderen $X_\nu = 0$, so ergibt sich der Koeffizient $\varrho\left(L, \frac{Q}{L^n}\right)$ aus (16) und der Koeffizient $\varrho\left(Q, \frac{Q}{L^n}\right)$ aus (17), die in beiden enthaltenen scheinbaren Korrelationen aus (18) bzw. (19).

Speziell bekommt man aus (16) für n gleich -1 die Korrelation zwischen Körperlänge und dem Gewicht, für $n = 0$ den gewöhnlichen Korrelationskoeffizienten zwischen Länge und Querschnitt. Für $n = 1$ die Korrelation zwischen der Länge und dem Quotienten aus Querschnitt dividiert durch die Länge.

Solche funktionellen Koeffizienten werden aus den Beobachtungen über Körperlänge und Gewicht mit Hilfe der üblichen Korrelationsmethoden direkt berechnet. Z. B. ergibt sich für das von Hrn. Kaup[1]) untersuchte deutsche Material, daß r von der Größenordnung 0,3, $\varrho\left(L, \frac{Q}{L}\right)$ von der Größenordnung 0, $\varrho\left(L, \frac{Q}{L^2}\right)$ etwa gleich $-0{,}5$, $\varrho\left(L, \frac{Q}{L^3}\right)$ etwa gleich $-0{,}6$ ist.

Auf Grund der Kaupschen Werte beträgt die Korrelation zwischen Länge und Gewicht $\varrho\,(L, Q \cdot L)$ etwa 0,5. Voraussagungen des Gewichts aus der Länge, wie sie z. B. Fabio Frasetto[2]) aufstellt, sind also ziemlich unsicher.

Der funktionelle Korrelationskoeffizient $\varrho\left(L, \frac{Q}{L^n}\right)$ wird negativ sein, sobald $n > \frac{v_2\, r}{v_1}$. Da $v_2\, r - v_1$ nach Kaup von der Größenordnung 0 ist, so wird dies bereits für $n > 1$ zutreffen.

Speziell ergibt sich auf Grund der Kaupschen Werte für $n = 1, 2, 3$ eine scheinbare Korrelation von der Größenordnung $-0{,}3$, $-0{,}5$, $-0{,}7$, die in den beobachteten Werten enthalten ist.

[1]) Korrelationskoeffizient und funktionelle Abhängigkeit von Körpermassen. Sitzungsberichte d. Ges. f. Morphologie u. Physiologie. München, Bd. 34, S. 39—72, 1923.

[2]) Acad. dei Lincei 30, Ser. V, Rom 1922.

Aus (17) erhält man speziell für $n = -1$ die physiologisch interessante Korrelation zwischen Q und $Q \cdot L$ als

$$\varrho(Q, Q \cdot L) = \frac{v_2 + v_1 r}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 r}}.$$

Nimmt man an, daß der Brustumfang dem fiktiven Querschnitt proportional ist, so läßt sich dies als die Korrelation zwischen Körpergewicht und Brustumfang auffassen. Dieser Ausdruck ergibt sich übrigens auch aus (16), falls man hier $n = -1$ setzt und die Variablen Länge und Querschnitt mit einander vertauscht. Für $n = 0$ wird $\varrho\left(Q, \frac{Q}{L^n}\right) = 1$, da es sich hier um eine Korrelation zwischen identischen Variablen handelt. Dieser funktionelle Korrelationskoeffizient wird negativ sein, sobald $n > \frac{v_2}{v_1 r}$, also nach den obigen Größenordnungsangaben erst für angenähert $n > 9$. Für die physiologisch interessanten Werte ist also die funktionelle Korrelation positiv.

6. Anwendung auf Probleme der Schädelmessung. Zwei Spezialfälle unserer Probleme treten bei Schädelmessungen auf [1]). Hier wird nämlich die Korrelation zwischen der Schädellänge L, Schädelbreite B und Schädelhöhe H einerseits und den aus diesen Größen berechneten Indices $\frac{B}{L}$, $\frac{H}{L}$, $\frac{B}{H}$ gebildet. Die so entstehenden Koeffizienten

$$\varrho\left(L, \frac{B}{H}\right); \quad \varrho\left(B, \frac{H}{L}\right); \quad \varrho\left(H, \frac{L}{B}\right); \quad \varrho\left(L, \frac{H}{B}\right); \quad \varrho\left(B, \frac{L}{H}\right); \quad \varrho\left(H, \frac{B}{L}\right)$$

gehören zur Kategorie $\varrho\left(X_i, \frac{X_2}{X_1}\right)$.

Die Koeffizienten

$$\varrho\left(L, \frac{B}{L}\right); \quad \varrho\left(B, \frac{H}{B}\right); \quad \varrho\left(H, \frac{L}{H}\right); \quad \varrho\left(L, \frac{H}{L}\right); \quad \varrho\left(B, \frac{L}{B}\right); \quad \varrho\left(H, \frac{B}{H}\right)$$

gehören zur Kategorie $\varrho\left(X_1, \frac{X_2}{X_1}\right)$.

Endlich die Koeffizienten

$$\varrho\left(B, \frac{B}{L}\right); \quad \varrho\left(H, \frac{H}{B}\right); \quad \varrho\left(L, \frac{L}{H}\right); \quad \varrho\left(H, \frac{H}{L}\right); \quad \varrho\left(L, \frac{L}{B}\right); \quad \varrho\left(B, \frac{B}{H}\right)$$

gehören zur Kategorie $\varrho\left(X_2, \frac{X_2}{X_1}\right)$.

Hat man also die drei Korrelationskoeffizienten und die Schwankungen der Größen L, B, H, so lassen sich diese Koeffizienten aus (15) bzw. (16) bzw. (17), die in den beobachteten Koeffizienten enthaltenen scheinbaren Korrelationen aus (18) bzw. (19) berechnen, indem man in diesen Formeln $n = 1$ setzt und die dort auftretenden Variablen durch die hier verwendeten ersetzt. Außerdem erlauben die Formeln aus der Kenntnis von 6 Koeffizienten die 12 anderen zu berechnen.

Bei den Korrelationen von Längen und Indices ist also zu beachten, ob sie gemeinsame Faktoren haben oder nicht. Im ersten Falle existiert bei Schädelmessungen, wie Pearson nachgewiesen hat, eine Korrelation. Länge, Breite und Höhe haben solche Korrelationen, mit den Indices, in denen sie jeweils auftreten, fast keine in den anderen Fällen.

Hieraus folgt ohne weiteres, daß diese nicht verschwindenden Korrelationen zum größten Teil nur scheinbar sind. Ist nämlich

$$\varrho\left(L, \frac{B}{H}\right) = 0; \quad \varrho\left(H, \frac{B}{L}\right) = 0; \quad \varrho\left(B, \frac{H}{L}\right) = 0,$$

so bedeutet dies nach (15), daß

$$v_2 r_{23} = v_1 r_{13} \qquad v_2 r_{12} = v_3 r_{13} \qquad v_1 r_{12} = v_3 r_{23}.$$

Da die Schwankungen v voneinander verschieden sind, ist die einzige Lösung dieses Gleichungssystems

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0,$$

was identisch mit der obigen Behauptung ist.

[1]) Vergl. Karl Pearson und Adelaide G. Davin, On the biometric constants of the human skull. Biometrica, Bd. 16, Nr. 3/4, 1924.

Auch die Korrelation einer ausgezeichneten Variablen mit einer Summe spielt bei Schädelmessungen eine Rolle, nämlich in der Form der Korrelation zwischen einer Variablen und einer zweiten, in welcher die erste enthalten ist. Die hierzu notwendigen Formeln ergeben sich aus (22), die hierin enthaltene scheinbare Korrelation aus (23), wenn hierbei $n = 2$ gesetzt wird.

7. Zusammenfassung. Somit haben wir die Schwankung eines Produktes von Variablen zurückgeführt auf die Schwankungen der einzelnen Variablen (5), die Schwankung einer Summe aber auf die mittleren Fehler der einzelnen Variablen (9). Während die Schwankung eines Produktes von der Größenordnung der Summe der Schwankungen ist, ist die Schwankung einer Summe von der Größenordnung der Schwankung einer Variablen. Ferner haben wir die Korrelation einer ausgezeichneten Variablen mit einem Produkt (13) sowie mit einer Summe (20) und die hierin enthaltenen scheinbaren Korrelationen (14) und (21) berechnet. Im einen Fall treten die Schwankungen, im anderen die mittleren Fehler auf.

Falls jedoch die sämtlichen Variablen von der gleichen Größenordnung sind und die gleichen Gewichte haben, ist die scheinbare Korrelation zwischen einer ausgezeichneten Variablen und einem Produkt von Variablen gleich der scheinbaren Korrelation zwischen dieser ausgezeichneten Variablen und der Summe derselben Variablen.

Beispiele aus der Physiologie und Kraniologie zeigen die Fruchtbarkeit dieser Formeln. 680

Über Interpolation.

Von **M. FEKETE** in Budapest.

Neben der bekannten reellen Interpolationsaufgabe für Funktionen einer reellen Veränderlichen tritt in den Anwendungen, z. B. in der Aeromechanik bei der Berechnung des Tragflächenauftriebs die folgende Fragestellung im Komplexen auf. Gegeben ist eine geschlossene Linie in der Ebene der komplexen Zahlen. Die Werte, die eine Funktion in den einzelnen Punkten dieser Kurve annimmt, sind vorgeschrieben und man soll sie interpolieren, d. h. in möglichst einfacher Form eine Funktion der komplexen Veränderlichen angeben, die die vorgeschriebenen Werte annimmt. Der Aufgabe genügt formal die Lagrangesche Interpolationsformel. Andererseits entsteht aber, wie bei der gewöhnlichen Interpolation, die Frage, ob, wenn die Punkte, in denen die Funktionswerte vorgeschrieben sind, dichter und dichter werden, die durch die Lagrangesche Formel gelieferten Funktionen konvergieren. Mit dieser Problemstellung beschäftigen sich die nachstehenden Ausführungen.

1. Es sei C eine stetige, doppelpunktlose geschlossene Kurve in der komplexen z-Ebene. Man soll auf dieser Kurve für jede natürliche Zahl n eine Gruppe G_n von n Punkten

$$z_1^{(n)},\ z_2^{(n)},\ \ldots,\ z_n^{(n)}$$

angeben, welche folgende Eigenschaft besitzt:

Ist $f(z)$ eine beliebige analytische Funktion der komplexen Variabeln z, die im Innern und auf der Kurve C überall regulär ist und bezeichnet $L_{n,f}(z)$ das Lagrangesche Interpolationspolynom, welches zur Punktgruppe G_n und zur Funktion $f(z)$ gehört (d. h. dasjenige Polynom von höchstens $(n-1)$-tem Grade, welche die Gleichungen $L_{n,f}(z_i^{(n)}) = f(z_i^{(n)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ befriedigt), so konvergiert die Folge

$$L_{1,f}(z),\ L_{2,f}(z),\ \ldots,\ L_{n,f}(z),\ \ldots \qquad (1)$$

in dem durch C umgrenzten abgeschlossenem Bereiche B gleichmäßig gegen $f(z)$.

Diese Aufgabe wurde für den Fall des Kreises von Hrn. Runge[1]) gelöst; er hat auch auf den Fall einer beliebigen Kurve hingewiesen[1]). Die genaue Formulierung und Lösung der Aufgabe für eine beliebige Kurve wurde indessen erst von Hrn. Fejér gegeben[2]).

Ich nenne mit Hrn. Fejér eine auf C befindliche Punktgruppe $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ daselbst **regelmäßig verteilt**, wenn bei einer schlichten Abbildung des Außengebietes von C auf das Aeußere eines Kreises (wobei die unendlich fernen Punkte der Ebenen ein-

[1]) »Theorie und Praxis der Reihen«, Sammlung Schubert XXXII, S. 137.

[2]) L. Fejér, Interpolation und konforme Abbildung (Göttinger Nachrichten 1918, 319 bis 331). S. auch N. E. Nörlund, Differenzenrechnung. (Berlin 1924.) 8. Kap. Interpolationsreihen, § 1 S. 200 bis 201. Vgl. auch G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. M. Fekete, usw. (Math. Zeitschrift 21 (1924), 203 bis 208). S. insbesondere Fußnote [7]).

ander entsprechen) die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ in die Eckpunkte eines diesem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen ν-Ecks übergeführt werden; dann kann die Fejérsche Lösung in folgendem Satze formuliert werden:

Bilden die Punkte von G_n für jedes n eine auf der Kurve C regelmäßig verteilte Punktgruppe, so konvergiert die Folge (1) bei unendlich wachsendem n im Innern und am Rande von C gleichmäßig gegen $f(z)$.

2. Nun will ich dieser Lösung der Aufgabe der passenden Wahl von Interpolationspunktgruppen eine zweite zur Seite stellen, indem ich zeige, daß sich jedem $n \geqq 2$ Punktgruppen Γ_n, bestehend aus n Punkten der Kurve C, zuordnen lassen, welche den Anforderungen der ebengenannten Aufgabe ebenfalls genügen und dabei vielleicht noch einfacher, als die obigen Punktgruppen G_n, insbesondere ohne Hinzuziehung der schlichten Abbildung charakterisiert werden können.

Es bezeichne $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ die Vandermondesche Determinante der Größen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, oder mit anderen Worten das Produkt $\underset{i<k}{\Pi_1^n}(z_i - z_k)$ und sei $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ eine Punktgruppe, gebildet aus solchen n Punkten der Kurve C, für welche der absolute Betrag von $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ seinen größten Wert erreicht, falls $z_1, z_2, \ldots, z_n$ unabhängig voneinander diese Kurve durchlaufen.

Ich behaupte: die Punktgruppe $\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ besitzt die eingangs gewünschten Eigenschaften der Interpolationspunktgruppen. Zum Beweise werde ich die entsprechenden Lagrangeschen Interpolationspolynome bei festem n näher betrachten. Setzt man

$$\omega_n(z) = (z - \zeta_1^{(n)})(z - \zeta_2^{(n)}) \ldots (z - \zeta_n^{(n)}) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

und

$$\omega_n^{(i)}(z) = \frac{\omega_n(z)}{(z - \zeta_i^{(n)})} \frac{1}{\omega_n'(\zeta_i^{(n)})} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \ . \ . \ . \ (2),$$

so haben die fraglichen Polynome die Form

$$\Lambda_{n,f}(z) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^{(n)})\, \omega_n^{(i)}(z) = \Lambda_{n,f} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Nun können aus dieser Formel die behaupteten Eigenschaften leicht gefolgert werden, auf Grund der Tatsache, daß die »Grundpolynome« $\omega_n^{(i)}(z)$ der Interpolation (3) überall auf C (folglich a fortiori innerhalb von C) der Ungleichung

$$|\omega_n^{(i)}(z)| \leqq 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

genügen. Ist nämlich $f(z)$ eine analytische Funktion von z, welche innerhalb und auf der Kurve C regulär ist, so kann sie bekanntlich[1]) ebenda durch eine Polynomfolge $\{P_\nu(z)\}$ derart approximiert werden, daß $P_\nu(z)$ von höchstens ν-tem Grade ist und die Ungleichung

$$\underset{(C)}{\operatorname{Max}} |f(z) - P_\nu(z)| \leqq c\, \vartheta^\nu \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

befriedigt, wobei c eine Konstante und $0 < \vartheta < 1$ ist. Nun ist aber offenbar für jedes $n \geqq 2$

$$\Lambda_{n,f} = \Lambda_{n,f-P_\nu} + \Lambda_{n,P_\nu}$$

und für $n \geqq \nu + 1$

$$\Lambda_{n,P_\nu}(z) \equiv P_\nu(z),$$

folglich besteht für $n = \nu + 1$

$$\Lambda_{n,f}(z) - f(z) = P_{n-1}(z) - f(z) + \Lambda_{n,f-P_{n-1}}(z).$$

Daraus folgt, mit Hinsicht auf (4) und (5),

$$\underset{(C)}{\operatorname{Max}} |\Lambda_{n,f}(z) - f(z)| \leqq c\, \vartheta^{n-1} + n\, c\, \vartheta^{n-1} = (n+1)\, c\, \vartheta^{n-1}$$

und somit die Richtigkeit der zu beweisenden Behauptung.

Was nun die auch an sich bemerkenswerte Eigenschaft (4) der Grundpolynome (2) betrifft, beachte man einfach, daß letztere auch in der Form

$$\frac{V(\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_{i-1}^{(n)}, \ z, \ \zeta_{i+1}^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)})}{V(\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_{i-1}^{(n)}, \zeta_i^{(n)}, \zeta_{i+1}^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)})}$$

[1]) Vgl. z. B. G. Faber, Ueber Reihenentwicklungen analytischer Funktionen (Inaug. Dissertation, München 1902). Hr. Szegö hat mir einen Beweis folgender Tatsache mitgeteilt: Ist einmal bewiesen, daß $f(z)$ in einem von einer analytischen Kurve umgrenzten abgeschlossenem Bereiche durch Polynomfolge beliebig fein gleichmäßig approximiert werden kann (Satz von Runge), so folgt daraus die Möglichkeit der Annäherung durch Polynome, welche der Ungleichung (5) genügen. Auf die Idee: aus der Approximierbarkeit von $f(z)$ durch Polynome der genannten Art die Konvergenz des Interpolationsverfahrens (3) zu folgen, wurde ich durch einen Satz des Hrn. A. Haar geleitet. Vgl. seine Inaug.-Diss.: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Göttingen 1909). Kap. II. § 1. S. 24 bis 27.

darstellbar sind; daß ferner nach der Definition der Punktgruppe $\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ der Zähler dieses Bruches dem Betrage nach $\leq$ ausfallen muß, als der Nenner, sobald die Variable z auf C beschränkt wird. Ich habe also den Satz bewiesen:

I. **Ist C eine beliebige doppelpunktlose geschlossene Kurve der z-Ebene, und bezeichnet $f(z)$ irgendeine analytische Funktion von z, welche in dem von C umgrenzten abgeschlossenen Bereiche regulär ist, $\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ aber eine Punktgruppe Γ_n, für welche $|V(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ sein Maximum erreicht, wenn $z_1, z_2, \ldots, z_n$ unabhängig voneinander die Kurve C durchlaufen, so konvergieren die entsprechenden Lagrangeschen Interpolationspolynome (3) innerhalb und am Rande von C gleichmäßig gegen $f(z)$.**

3. Die beiden Grundsteine des Beweises von I., namentlich die Ungleichungen (4) und (5) haben ihre entsprechenden Verallgemeinerungen für den Fall, wo statt einer Jordanschen Kurve C m solche voneinander getrennten Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ in der z-Ebene vorgeschrieben und statt einer Funktion $f(z)$ m analytische Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_m(z)$ von z vorgegeben sind, welche letztere sich der Reihe nach in den von $C_1, C_2, \ldots, C_m$ umgrenzten abgeschlossenen Bereichen regulär verhalten. Es führt ein dem oben angewandten ähnlicher Gedankengang zum folgenden allgemeineren Satze:

II. **Sei $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ eine Punktgruppe, für welche die Vandermondesche Determinante $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ das Maximum ihres Betrages erreicht, falls $z_1, z_2, \ldots, z_n$ unabhängig voneinander sämtliche Punkte von m gegebenen, doppelpunktlosen und geschlossenen, voneinander getrennten Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_m$ durchlaufen. Bezeichne $\Lambda_{n, f_1, f_2, \ldots, f_m}(z)$ dasjenige Polynom von höchstens $(n-1)$-tem Grade, welches im Punkte $\zeta_i^{(n)}$ den Wert $f_j(\zeta_i^{(n)})$ besitzt, falls $\zeta_i^{(n)}$ ein Punkt der Kurve C_j ist. Hierbei bedeute $f_j(z)$ eine analytische Funktion von z, die in dem von C_j umgrenzten abgeschlossenen Bereiche B_j regulär ist. Dann konvergieren die Interpolationspolynome $\Lambda_{n, f_1, f_2, \ldots, f_m}(z)$ für $n \to \infty$ in jedem der Bereiche B_j gleichmäßig, und zwar im Bereiche B_j gegen die Funktion $f_j(z)$.**

4. Nun möchte ich zum Satze I zwei ergänzende Bemerkungen machen. Erstens erwähne ich, daß die Punktgruppe G_n, welche durch Hrn. Fejér betrachtet wird und die obigen Punktgruppen Γ_n eventuell auch zusammenfallen können. Das ist z. B. dann der Fall, wenn C ein Kreis ist. Die Punkte der fraglichen Punktgruppen liegen dann in den Eckpunkten eines diesem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes[1]).

Meine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Tatsache, daß Satz I auch ohne Berufung auf die Ungleichung (5), durch nochmalige Ausnutzung der Eigenschaften, die der Punktgruppe $\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ nach ihrer Definition zukommen, bewiesen werden kann, übrigens auf einem Wege, welcher selbst die Ungleichung (5) wiedergibt. Dieser Weg war eben, auf dem ich zuerst den Satz I erhielt. Ich stützte mich dabei auf einen Hilfssatz von selbständigem Interesse, der mit der Anwendung eines von mir auch für allgemeine Punktmengen definierten Begriffes, namentlich des Begriffes des zu einer Kurve gehörigen »transfiniten Durchmessers«[2]) in folgender Form formuliert werden kann:

Es sei j eine gegebene Jordansche Kurve und J eine zweite, ganz beliebige Jordansche Kurve, welche j umschließt. Dann kann man zu J ein positives $\varepsilon = \varepsilon(J)$ finden, sodaß jede Jordansche Kurve K, die die Kurve j enthält und deren transfiniter Durchmesser den der Kurve j um weniger als ε übertrifft, notwendigerweise in das von j und J umgrenzte Ringgebiet fallen muß.

Aus diesem leicht beweisbaren Hilfssatze erhalte ich den Satz I einfach so:

Da nach Voraussetzung die Funktion $f(z)$ auch auf C regulär ist, so kann diese Kurve durch eine analytische Kurve K derart umschlossen werden, daß $f(z)$ sich im Innern und auf der Kurve K regulär verhält. Dann läßt sich aber das zu der Punktgruppe Γ_n und zu $f(z)$ gehörige Lagrangesche Interpolationspolynom $\Lambda_{n,f}(z)$ auf Grund der allgemeinen Cauchy-Hermiteschen Formel in der Form

$$\Lambda_{n,f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left(1 - \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)}\right) d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

[1]) Vgl. a. a. O., S. 413, [3]) S. 385 (eine Bemerkung von Hrn. Pólya).

[2]) M. Fekete, Ueber die Verteilung der Wurzeln usw. (Math. Zeitschrift 17 (1923), S. 228—249).

darstellen, wobei die Integration nach ζ entlang der Kurve K in positiver Richtung zu vollführen ist und z irgendeine Stelle innerhalb K, $\omega_n(z)$ das Polynom

$$\omega_n(z) = (z - \zeta_1^{(n)}) \ldots (z - \zeta_n^{(n)})$$

bedeuten. Bezeichnet nun M_n das Maximum von $|\omega_n(z)|$ auf C, so bilden die durch die Gleichung

$$|\omega_n(z)| = (\sqrt[n]{M_n} + \delta)^n$$

definierten Lemniskaten λ_n eine solche Schar von Jordanschen Kurven, die sämtlich die Kurve C in ihren Innern enthalten und deren transfiniter Durchmesser $(= \sqrt[n]{M_n} + \delta)$ für $n > N(\delta)$ denselben von C um weniger als 2δ übertreffen, da doch, wie ich anderswo [1]) gezeigt habe, $\sqrt[n]{M_n}$ für $n \to \infty$ gegen den transfiniten Durchmesser von C strebt.

Nach dem obigen Hilfssatze sind also sämtliche Lemniskaten λ_n für genügend kleines δ von einem gewissen n an im Innern von K gelegen, folglich ist für solche n

$$\operatorname{Min} |\omega_n(\zeta)| > (\sqrt[n]{M_n} + \delta)^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

wenn ζ die Punkte von K durchläuft.

Aus (6) und (7) folgt, daß

$$|A_{n,f}(z) - f(z)| < \frac{1}{2\pi} \frac{M L}{d} \left(\frac{\sqrt[n]{M_n}}{\sqrt[n]{M_n} + \delta} \right)^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

ausfällt, wenn z auf die Kurve C beschränkt wird; hierbei bedeutet M das Maximum von $|f(z)|$ auf K, L die Länge dieser Kurve, d aber die kleinste Entfernung der Punkte der Kurve K von C.

Aus (8) folgt der Satz I unmittelbar, da doch $\dfrac{\sqrt[n]{M_n}}{\sqrt[n]{M_n} + \delta}$ für $n \to \infty$ gegen einen positiven Wert zustrebt, der < 1 ist.

5. Schließlich möchte ich noch erwähnen, daß die Wahl einer Punktgruppe Γ_n als Interpolationspunktgruppe auch im Falle von Bedeutung ist, wo C sich auf ein reelles Intervall (a, b) reduziert und man eine reelle Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x betrachtet, die im Intervalle (a, b) eine stetige Ableitung besitzt, welche daselbst der Lipschitzschen Bedingung $\quad |f'(x_1) - f'(x_2)| < \lambda \, |x_1 - x_2| \quad$ genügt.

Dann kann man nämlich die Funktion $f(x)$ durch eine Polynomfolge $\{P_n(x)\}$ derart approximieren, daß $P_n(x)$ von höchstens n tem Grade ist und die Ungleichung

$$\underset{a \leq x \leq b}{\operatorname{Max}} |f(x) - P_n(x)| \leq \text{const.} \frac{1}{n^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

befriedigt [2]). Verknüpft man diese Tatsache mit der auch im jetzt betrachteten Falle gültigen Ungleichung (4), so ergibt sich folgender Satz:

III. Ist $f(x)$ eine beliebige reelle Funktion des reellen x, deren Ableitung im Intervalle (a, b) der Lipschitzschen Bedingung genügt und bezeichnet $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ eine Punktgruppe Γ_n, für welche $|V(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ sein Maximum erreicht, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander die Punkte des Intervalls (a, b) durchlaufen, so konvergieren die entsprechenden Interpolationspolynome in diesem Intervalle gleichmäßig gegen $f(x)$.

Ist speziell $a = -1$, $b = +1$, so sind die Größen $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ die Nullstellen des Polynoms $Q_n(x)$, welches aus der $(n-1)$-ten Kugelfunktion $P_{n-1}(x)$ durch Integration nach der Formel

$$Q_n(x) = \int_x^1 P_{n-1} \, dx$$

hervorgeht [3]).

[1]) M. Fekete, Ueber den absoluten Betrag von Polynomen usw. (Erscheint demnächst in der Math. Zeitschrift.) — [2]) D. Jackson, Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen usw. Göttinger Diss., 1911, S 23. — [3]) I. Schur, Ueber die Verteilung der Wurzeln usw. (Math. Zeitschrift 1 (1918), S. 377—402). § 1. Ein Satz von Stieltjes, S. 377—380.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Theorie des Druckversuchs. Bei den bisherigen Arbeiten, welche den Einfluß der Reibung beim Druckversuch nach der Elastizitätstheorie behandeln, wird angenommen, daß nur der Umfang der Endfläche keine Querverschiebung erfährt, während doch zur eindeutigen Bestimmung der Spannungen eine über die ganze Druckfläche sich erstreckende Bedingung erforderlich ist. In der hier auszugsweise wiedergegebenen Arbeit, wofür ich die Anregung Herrn Professor v. Kármán verdanke, werden folgende Annahmen gemacht.

1. Die Druckplatten sind gegenüber dem Probekörper als vollkommen starr anzusehen; die Endflächen des Probekörpers bleiben also eben.

2. Die Reibung ist so groß, daß die Querdehnung in der Druckfläche überall vollständig verhindert wird.

3. Das Problem wird, um eine strenge Lösung zu geben, als zweidimensionales mit Hilfe Airyscher Spannungsfunktionen behandelt.

Es zeigt sich, daß die Ecken singuläre Stellen sind. Diese Singularität muß also zunächst bestimmt werden, und zwar geschieht dies mittels einer Spannungsfunktion von der Form

$$F = r^n [A(\cos n\varphi - \cos(n-2)\varphi) + B(\sin n\varphi + \frac{n}{2-n}(\sin n - 2)\varphi)] \quad (1),$$

die für $\varphi = 0$, an der freien Begrenzung, $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$, also auch $\sigma_\varphi = 0$, $\tau_{r\varphi} = 0$ liefert. Die beiden Randbedingungen an der Druckfläche liefern zwei homogene Gleichungen für A und B, und durch Nullsetzen der Nennerdeterminante erhält man die Gleichung

$$m^2\left(n^2 - 2n - 3\sin^2 n\frac{\pi}{2}\right) + 4m\left(1 + \sin^2 n\frac{\pi}{2}\right) - 4 = 0 \quad (2),$$

welche den Exponenten n unter Zugrundelegung der ebenen Formänderung als Funktion der Poissonschen Konstante $\frac{1}{m}$ bestimmt. n nimmt nur die Werte zwischen 1,5 und 2 an. Weiterhin erhält man für den erforderlichen Reibungskoeffizienten in der Druckfläche

$$\mu = \left|\frac{\tau}{\sigma_\varphi}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left|\operatorname{tg} n\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m(3-n)-2}{mn-2}\right|,$$

womit in Verbindung mit (2) μ ebenfalls als Funktion von m gegeben ist. Man findet für

$$m = 2 : \mu = \sim 0{,}5,$$
$$m = 4 : \mu = \sim 0{,}25,$$
$$m = \infty : \mu = 0.$$

Die Spannungen selbst werden in der Ecke unendlich wie r^{n-2}; z. B. für $m = 2$ wie $r^{-0,42}$, für $m = \sim 4$ wie $r^{-1/4}$. Das Integral über die Spannungen in einem endlichen Bereich, der die Ecke enthält, bleibt endlich. In der Ecke müssen bleibende Formänderungen eintreten, die aber auf einen sehr kleinen Teil des Körpers beschränkt sind.

Aus den Versuchen von Franz Nehl (Dissertation Aachen 1925, Seite 29) kann man entnehmen, daß beim Stauchversuch mit Flußeisen diese bleibenden Deformationen der Ecke in der Tat eintreten, bevor im übrigen die Elastizitätsgrenze erreicht wird.

Die maximale Schubspannung für konstante r tritt auf einem Strahl auf, der unter dem Winkel φ_0 gegen die freie Begrenzung geneigt ist; man findet für φ_0 die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2AB}{A^2(2-n) - B^2 n},$$

so daß man φ_0 als Funktion von m bestimmen kann. Für $m = 2$ ist $\varphi_0 = \sim 45^0$, für $m = 4$ $\varphi_0 = \sim 21^0$ ($m = \infty$; $\varphi = 0$). Nach der Mohrschen Theorie würde dieser Strahl den Ort der größten Beanspruchung darstellen.

Die Lösung für die Ecke ermöglicht es, den Spannungszustand für einen begrenzten Körper zu ermitteln. Wir denken uns die der Gleichung (1) entsprechenden Spannungszustände überlagert, indem wir die Punkte $0, 0'$, $1, 1', 2, 2' \ldots . k, k' \ldots .$ in Abb. 1 als Ecken ansehen. Die so durch Superposition entstehende Spannungsverteilung erfüllt offenbar die Randbedingungen an der Druckfläche innerhalb der Strecke $0 - 0'$, daß die Fläche eben bleibt und die Querverschiebung null ist. Außerdem sieht man, daß an den senkrechten Grenzen des Mittelstreifens durch 0 und 0' keine Schubspannungen entstehen.

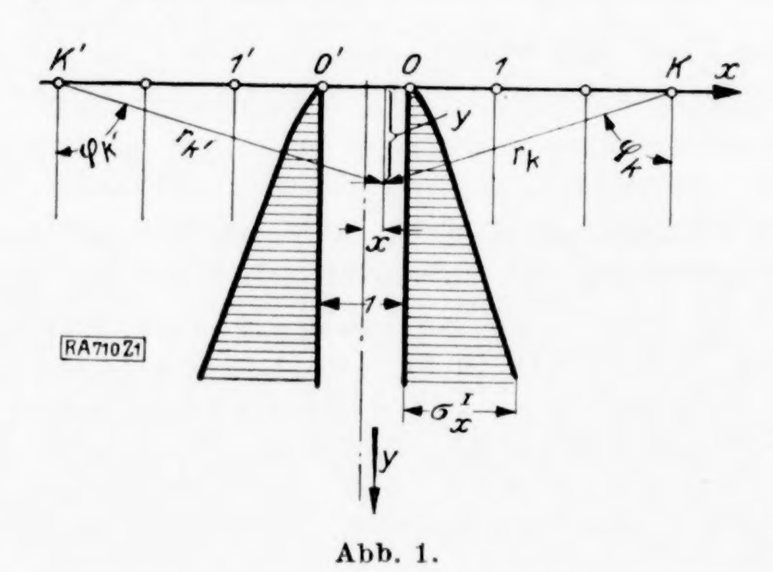


Abb. 1.

Die Schwierigkeit, daß man durch Ueberlagerung der unendlich vielen Funktionen unendlich große Spannungen σ_x und σ_y erhält, beseitigt man dadurch, daß man noch die gleichförmigen Zugspannungen $\sigma_x = c \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-2}$ und $\sigma_y = (m-1) \cdot c \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-2}$ überlagert. Durch diese werden die Randbedingungen ebenfalls nicht geändert. Man erhält so für die Spannungen konvergente Reihen nach Potenzen von x und

y. Die seitlichen Ränder sind indessen noch nicht spannungsfrei: es bleiben Zugspannungen $\sigma_x l$ übrig, wie in Abb. 1 angegeben. Diese können indessen durch Ueberlagerung von bekannten regulären Lösungen für den unendlichen Streifen unschwer beseitigt werden, wodurch man zu der gesuchten Lösung gelangt. Aus den so berechneten vollständigen Spannungen folgen die in Abb. 2 gezeichneten Linien τ_{max} = konst., die eine Zone geringerer Beanspruchung von annähernd dreieckigem Querschnitt an der Druckfläche und einen zweiten Bereich geringerer Beanspruchung in der Nähe des freien Randes erkennen lassen. Dazwischen liegt eine Zone größter Bruch- (Fließ-) Gefahr.

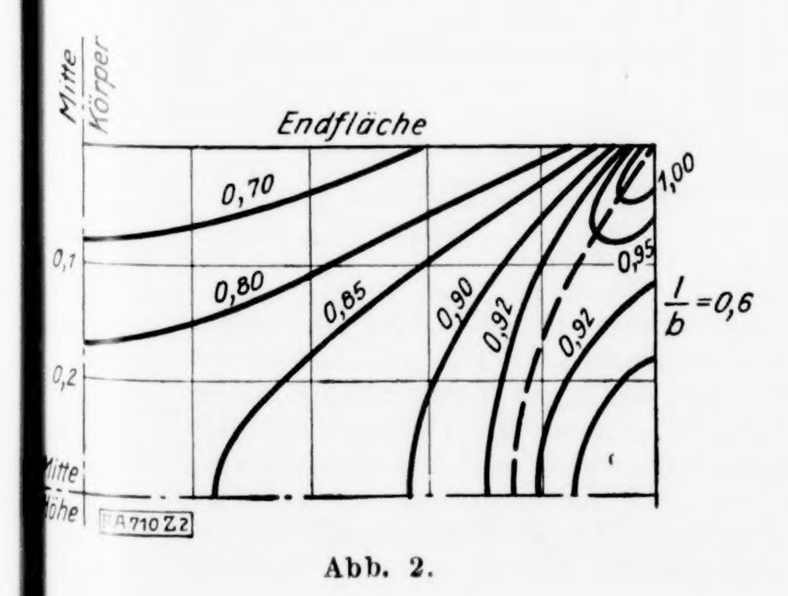


Abb. 2.

Abb. 3 zeigt den Verlauf der Druckpannung σ_y in Schnitten parallel der Endfläche. Da in der Entfernung der 0,6 fachen Breite von der Endfläche der Zustand gleichmäßiger Druckspannung praktisch erreicht ist, lassen sich mit hinreichender Genauigkeit die Spannungen für endliche Längen bis zu den 0,6 fachen der Breite herab leicht berechnen. Abb. 2 zeigt die Linien τ_{max} = konst. für $l/b = 0{,}6$.

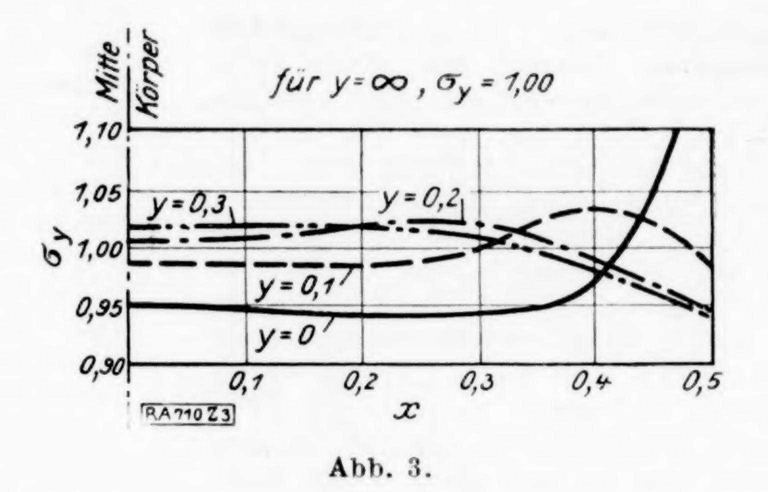


Abb. 3.

Ueber die Abhängigkeit der Bruch- bezw. Fließ-Grenze von der Höhe des Probekörpers kann man folgendes sagen: die Elastizitätsgrenze wird an den Ecken streng genommen schon bei beliebig geringer Last überschritten. Man kann indessen annehmen, daß das Fließen praktisch erst einsetzt, wenn die Elastizitätsgrenze längs der ganzen Zone geringsten Widerstandes (in Abb. 2 gestrichelt gezeichnet) überschritten wird. In dem Beispiel $l/b = 0{,}6$ würde dies eintreten, falls die Last im Verhältnis 0,92 : 1 erhöht wird. Dieses Verhältnis entspricht der Größenordnung nach der beobachteten Erhöhung der Fließgrenze mit abnehmender Höhe.

Wie der Uebergang vom rein elastischen Zustand zum Fließzustand vor sich geht, ist schwer zu sagen.

Für die Ecke kann man indessen eine Lösung angeben, bei der ein plastischer Teil an der seitlichen Begrenzung und ein elastischer Teil an der Druckfläche unter einem bestimmten Winkel ϑ (vom seitlichen Rande an gerechnet) aneinander stoßen und an der Druckfläche wieder dieselben Randbedingungen wie vorher gelten. Der plastische Teil wird nach Art der Prandtlschen Lösung für die stumpfe Schneide zusammengesetzt. Ist β der Winkel, unter dem die Mohrsche Grenzgrade im $\sigma\tau$-Koordinatensystem gegen die σ-Achse geneigt ist, so erhält man für ϑ die Gleichung

$$\frac{1}{\sin^2\beta}\left[1-(1-\sin\beta)\,e^{-2\left(\vartheta-\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\beta}\right]\cdot\left[\cos 2\vartheta-\frac{\sin 2\vartheta}{\operatorname{tg}(2\vartheta+\beta)}\right]=\frac{m}{m-2},$$

also für

$$m = 2 : \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2},$$

$$m = \infty : \vartheta = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}.$$

Der Strahl mit der Neigung ϑ sollte den nicht fließenden Bereich abgrenzen. Die Versuchsergebnisse reichen leider nicht aus, um die Uebereinstimmung prüfen zu können.

Die ausführlichen Rechnungen sollen in meiner demnächst erscheinenden Aachener Dissertation mitgeteilt werden.

Aachen. Max Knein. 710

Massenausnutzung in rotierenden Schwungkörpern. Benutzt man einen axensymmetrischen Rotationskörper als Energiespeicher, so kann die Frage nach dem geringsten Massenverbrauch zur Erzielung einer vorgeschriebenen Nutzleistung gestellt werden.

Es soll gezeigt werden, daß ein Körper, der nach der Gleichung von Stodola: $y = y_0\, e^{-r^2/2p^2}$ entworfen wird, diese Bedingung erfüllt. In Abb. 1 ist ein beliebiger Rotationskörper gezeichnet, der das vorgeschriebene Schwungmoment S besitzen möge (1 2 3). Die Kurve seiner reduzierten Tangentialspannung ($\sigma_{t\,\mathrm{red}}$) verläuft etwa in der gezeichneten Weise (I II). Wird diese Spannungskurve gerade gestreckt (I III), dann stellt sich die log. Kontur nach der obigen Gleichung ein, die aus dem Körper (1 2 3) ein Stück abtrennt (schraff.). Damit aber die Stodolasche Form, die für ein $r_a = \infty$ gilt, auch für ein endliches Scheibenstück erhalten bleibt, ist der elastische Anschluß an der Randfläche, d. h. die Randbedingung: $\sigma_{t_1\,\mathrm{red}} = \sigma_{t_2\,\mathrm{red}}$ herbeizuführen. Dies gelingt bekanntlich durch Anfügen eines abschließenden Kranzes, der verschiedene Formen annehmen kann, wofern nur die Bedingung des elastischen Gleichgewichtes erfüllt ist. Das abgetrennte Stück (schraffiert), sein Gewicht sei: G', kann dazu benutzt werden, den Kranz zu bilden. Bei dieser räumlichen Verschiebung tritt eine Aufwertung der Massen ein, die mit einer Gewichtsverminderung in Einem verläuft.

Man bilde die Gleichung:

»Schwungmoment des abgetrennten Teiles
= Schwungmoment des Kranzes.«

Jedes Massenelement Δm wird im Verhältnis $\frac{r_1^2}{r_2^2}$ leichter, woraus sich der Gewichtsgewinn in jedem Fall integrierbar ergibt.

Wird die Stodolasche Scheibe mit unendlicher radialer Erstreckung als Energiespeicher eingeführt, dann kann kein Massenelement mehr aufgewertet werden, so daß diese Form die beste Massenverteilung hinsichtlich der Schwungwirkung bietet. (7 ∞) Fig. 1.

Es ist zweckmäßig, zur leichteren Einsicht bei solchen Untersuchungen den Begriff des Schwungwertes einzuführen:

$$W = \frac{S}{G} = \frac{\textbf{Schwungmoment}}{\textbf{Gewicht}},$$

wobei hier W als Schwungmoment der Gewichtseinheit aufzufassen ist. Für die ∞ log. Scheibe wird:

$$W_\infty = 8\,p^2 \quad p^2 = \frac{\sigma}{\mu\,\omega^2}\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{1{,}432\,\sigma}{\mu\,\omega^2} \ \text{im Fall der Dehnungstheorie}$$

σ = höchstzulässige Zugspannung,
μ = Dichte,
ω = Winkelgeschwindigkeit.

Der Schwungwert eines beliebigen Rotationskörpers läßt sich allgemein stets ausdrücken durch: $W = \Phi \cdot p^2$; hier ist Φ ein Gestaltfaktor numerischen Charakters. Φ kann bestenfalls den Wert 8 erreichen, der jedoch nur theoretisch denkbar ist. Es ist zu ersehen, daß die Geradstreckung der Spannungskurve den Ausgangspunkt für eine vorteilhafte Massenanordnung bietet; handelt es sich um Kranzscheiben, dann zeigt sich, daß es für solche, bezw. für Rotationskörper mit endlicher Begrenzung überhaupt, nach der Elastizitätstheorie unmöglich ist, eine vollkommene Geradstreckung zu erzielen.

Die Differentialgleichung der Vertraglichkeit von σ_r und σ_t in rotierenden Körpern bei zweidimensionaler Betrachtung des Spannungsproblemes:

$$\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} = \frac{d}{d\,r}\left\{ r\left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}\right)\right\}$$

liefert für $\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} = \text{konst.}$ wieder $\sigma_r = \sigma_t$ und verweist auf die Stodolasche Form. Der Abschlußkranz wird dadurch identisch mit dem fehlenden Teil der log. Scheibe.

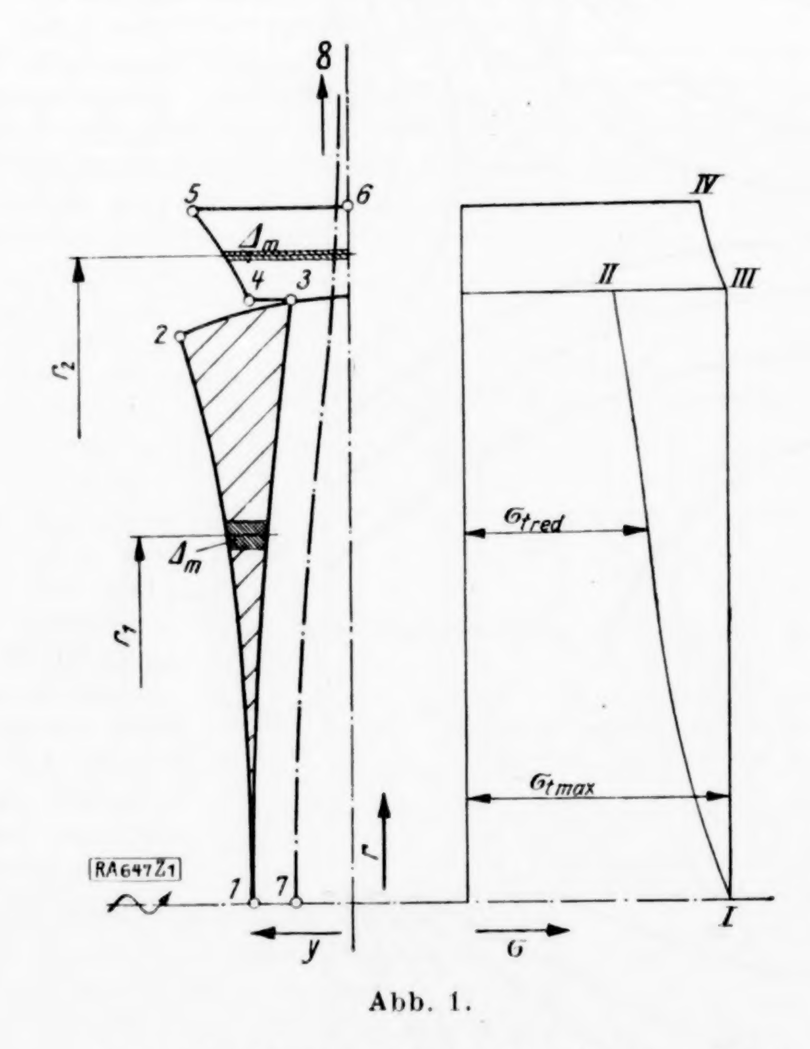


Abb. 1.

Jede Kranzform wird also eine in Abb. 1 gezeichnete Sp.-Kurve (I, III, IV) aufweisen und somit einen kleineren Gestaltfaktor haben als 8. Eine Variation der Kranzform läßt sich ermöglichen, wenn man als Kranzkontur die Gleichung: $h = B\,r^n$ benützt und die Beiwerte B, n ändert. Die Rechnungen führen dabei auf algebraische Schwierigkeiten, weshalb

im Weiteren die Form: $n = 0$, der zylindrische Kranz untersucht wird (Abb. 2).

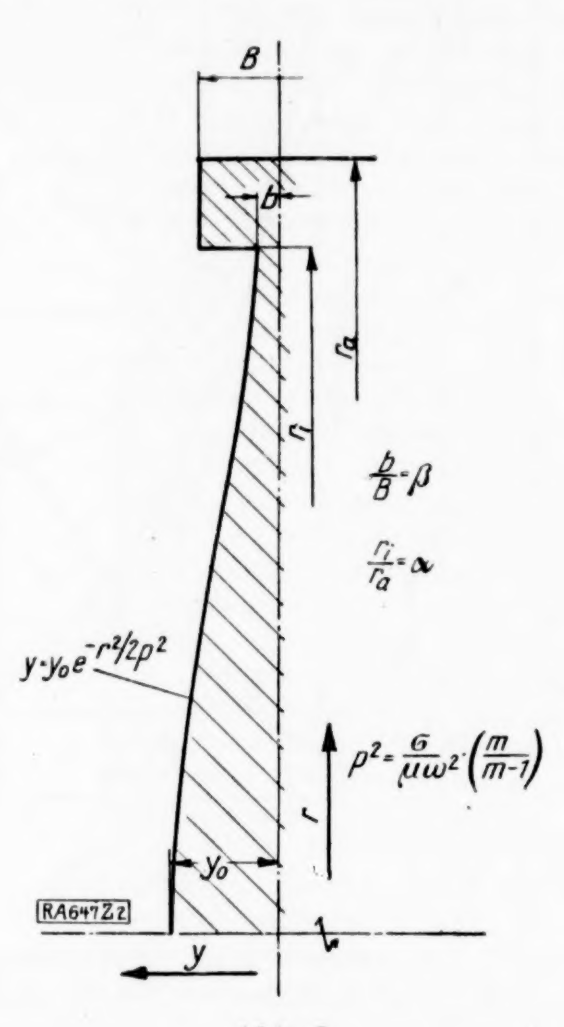


Abb. 2.

Die Betrachtung der »massengeometrischen Variationen« führten auf ein isoperimetrisches Problem mit zwei beweglichen Randpunkten. Um die Einflüsse des Spannungszustandes auf die Massenverteilung analytisch überhaupt in Rechnung setzen zu können, ist es zweckmäßig die zu variierende Kontur in der zitierten Form: $h = B r^n$ anzusetzen, um durch ein Näherungsverfahren (eventuell Verf. v. Ritz) Extremalen des Problems zu gewinnen, die dann auf ihre Eignung hinsichtlich der auftretenden Spannungsgrößen zu untersuchen sind. Verzichtet man auf die Herleitung einer optimalen Kranzkontur und beschränkt man sich auf den trivialen Ansatz: $n = 0$, dann erhält man die im Folgenden angegebenen Resultate:

Das Gewicht einer in Abb. 2 gezeichneten Scheibe ist ausgedrückt durch:

$$G = \frac{S}{\Phi \cdot p^2}.$$

Der Gestaltfaktor dieser Kombination befolgt die Gleichung:

$$\Phi = \left[2\,Ka\,(1+\alpha^2)\cdot\frac{1}{1+\nu}\right] + \left[\left(8 - \frac{4\,\alpha^2\,Ka}{e^{Ka\cdot\alpha^2/2} - 1}\right)\cdot\frac{\nu}{1+\nu}\right],$$

$$Ka = 0{,}85 \cdot \frac{1 + \beta\left[\frac{1{,}86 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right]}{1 + 0{,}212\,\alpha^2},$$

$$\nu = \frac{2\,\beta}{Ka}\cdot\frac{\left[e^{Ka\cdot\alpha^2/2} - 1\right]}{1 - \alpha^2}.$$

In Abb. 3 ist Φ in Abhängigkeit von α und β gezeichnet, sämtliche Kurven: β = konst. treffen sich im Punkt $\Phi = 8$, der für: $r = \infty$ gilt, wobei der Kranz vollkommen degeneriert erscheint und die Masse nur in der log. Scheibe auftritt.

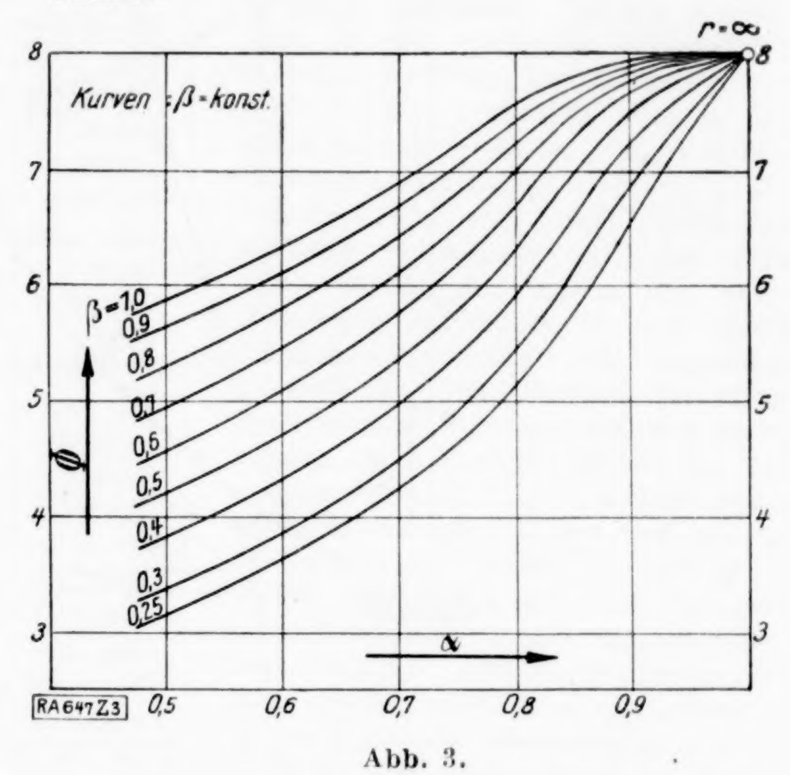


Abb. 3.

Von praktischer Wichtigkeit ist der Fall, daß ein Grenzdurchmesser D vorgeschrieben wird, innerhalb wessen die Masse zum verlangten Schwungmoment angeordnet werden soll. Es läßt sich finden, daß in diesem Fall die Beziehungen gelten:

$$n = \frac{8070}{D}\sqrt{Ka\cdot\sigma} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$G = \frac{N}{\sigma\cdot\Phi}\cdot\frac{16\,300}{\psi - \psi^2/200} \quad . \; . \quad (2)$$

N = Nutzleistung in PS sec für Räder aus Flußeisen: $m = {}^{10}/_3$, ψ = Tourenabfall in der Prozentziffer (z. B.: 20 vH = 20 einsetzen), n = Drehzahl/min.

3. $\Phi = f(Ka)$ ... Gleichung typisch für die Gestalt des gewählten Rades. Wird die Form des zylindrischen Kranzes der Berechnung zugrundegelegt, dann findet sich daraus eine Gewicht Drehzahlkurve: $n = f(G)$ sobald die Höchstspannung σ konstant gelassen wird (Abb. 4).

Dieses Diagramm ist zu entnehmen, daß die Gewichte der Schwungscheiben mit zunehmender Drehzahl abnehmen.

Wird n konstant gelassen, und die Spannung σ verändert, dann drückt sich ein extremer Wert für das Gewicht aus wie in Abb. 5 gezeigt wird.

Man kann demnach für jede Drehzahl eine kritische Spannung σ_{kr} finden, womit das Rad zu dimensionieren ist.

Mit zunehmender Drehzahl steigt die kritische Spannung. Aus beiden Kurven läßt sich dann eine Minimalgewichtskurve ent-

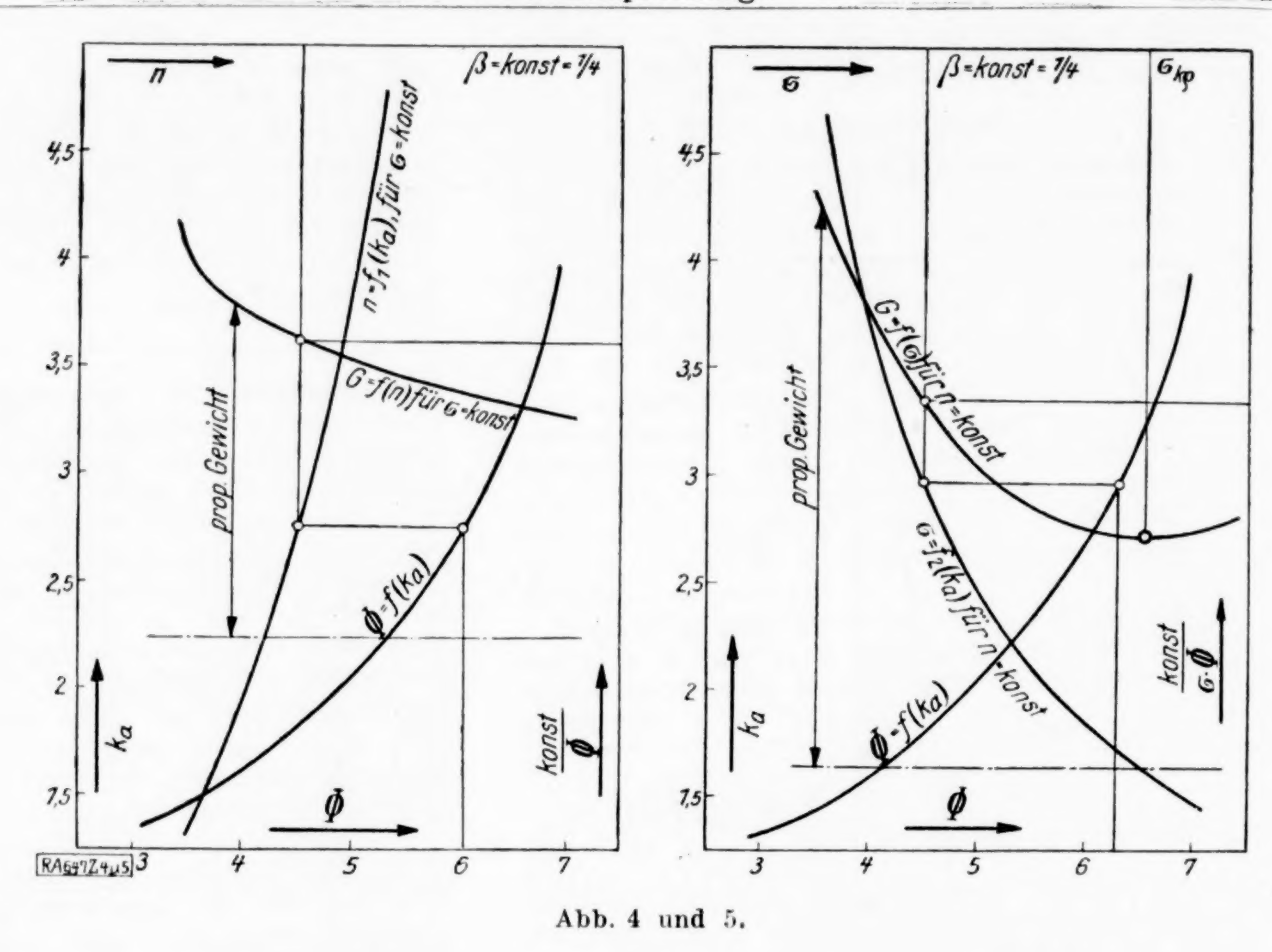


Abb. 4 und 5.

β = konst = 7/4

Abb. 6.

werfen, wie Abb. 6 zeigt. Die Kurven ad 4 berühren die Minimalkurve am Ort der kritischen Spannung, d. h. die M. K. ist somit die Einhüllende aller Drehzahlkurven. Für jeden Grenzdurchmesser findet sich eine besondere M. K.

Wird ein Grenzdurchmesser vorgeschrieben, dann läßt sich nach Wahl der höchstzulässigen Spannung: σ_{kp} eine Drehzahl genau festlegen, für welche das Gewicht des Schwungrades den niedrigsten Wert annimmt.

Z. B. Für den Grenzverladedurchmesser: $D = 440$ cm findet sich die günstigste Drehzahl bei $\sigma_{kp} = 1000$ at (Stahlguß) mit $n = 800$ i. d. Min. In diesen Diagrammen ist β überall mit $^1/_4$ eingesetzt worden, was aus konstruktiven Gründen nicht unterschritten werden sollte.

Qualitativ ändert sich an den Ergebnissen nichts, wenn die Kranzform vom Rechtecksquerschnitt abweicht, es ist vielleicht zu erwarten, daß sich die Minimalgewichte um Weniges vermindern. Von praktischer Bedeutung sind aber jedenfalls nur die behandelten Scheiberkombinationen.

Graz, im August 1925.

Hellwig A. Schmalz. 647

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin SW 19, Beuthstr. 7, zu beziehen.)

Dr. G. **RÜCKLE** und Dr.-Ing. F. **LUBBERGER,** Der Fernsprechverkehr als Massenerscheinung mit starken Schwankungen. Mit 19 Abb. im Text und auf einer Tafel. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. V + 150 S. Preis 11 M, geb. 12 M.

Die vorliegende Schrift versucht zum ersten Male, die Anwendung statistischer Methoden auf die verwickelten technischen Aufgaben des Fernsprechverkehrs zu zeigen. Der Nachweis der Berechtigung der eingeschlagenen Methoden wird durch Vergleich mit der Erfahrung erbracht.

Nach einer Darlegung der Grundgrößen des Fernsprechverkehrs wird auf die statistische Erfassung der Verluste (Abschnitte II—VI) eingegangen. Es wird eine kritische Darstellung der neueren Verlusttheorien gegeben,

die sich im wesentlichen auf die Poissonsche Verteilungsfunktion stützen. Im Abschnitt VII wird für die spezifische Leistung einer Verbindungsleitung eine überraschend einfache logarithmische Beziehung gegeben. Abschnitt VIII bringt eine neue Ableitung des Exponentialgesetzes für die Verteilung der Gesprächslängen; ebenso wird der störende Einfluß langer Gespräche untersucht. Im Abschnitt IX kommt der Fragenkomplex der Teilung und Zusammensetzung von Verkehrsmengen ausführlich zur Sprache. Die allgemeine Lösung des Teilungsproblems wird durch die relative Schwankung gekennzeichnet. Es wird hierauf in geschickten mathematischen Ansätzen und Entwicklungen die Erfassung der mathematischen Erwartung der Schwankungen bewirkt. Durch einen verallgemeinerten Bernoullischen Ansatz für die zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten bei wiederholten Versuchen gelingt es, die für die Verbindung und Trennung von Systemen grundlegenden Dispersionsverhältnisse eindeutig festzulegen. Die theoretische Berechnung des Gruppenzuschlages weist eine gute Uebereinstimmung mit zahlreichen Messungen auf. Als Beispiel wird die Berechnung eines Staffelfeldes ausgeführt. Die angegebenen Formeln und Kurven gestatten, auf rein rechnerischem Wege die wirtschaftlichsten Staffelanordnungen zu ermitteln. Es ist zu begrüßen, daß die Verfasser nicht unterlassen haben, in einem Anhang die praktische Auswertung mit dem Rechenschieber zu zeigen. Die in einem weiteren Anhang gemachten Angaben über das Schrifttum sind vollständig.

Es ist zu bemerken, daß nach Ansicht des Ref. die Schrift überhaupt erstmalig den Versuch unternimmt, die statistische Behandlung technischer Probleme aufzuweisen. So wendet sie sich denn nicht nur an den engeren Kreis der Fernsprechtechniker und darüber hinausgehend an den mathematisch interessierten Ingenieur überhaupt. Die Schrift kann vor allem dem Wahrscheinlichkeitstheoretiker angelegentlich empfohlen werden. Er wird viele Anregungen schöpfen können, wenn ihm die Seite der Anwendung seiner Theorie nicht fremd ist. Es wäre sogar zu wünschen, daß dem rein theoretisch arbeitenden Mathematiker die Schrift zu dem Zweck in die Hand gegeben wird, um ihn auch einmal mit der theoretischen Behandlung von aus der Praxis herausgewachsenen Aufgabenstellungen bekanntzumachen. Die wesentlich verschiedenen Ansätze dürften Anlaß zu vielseitiger Anregung bieten. Die klare und flüssig geschriebene Darstellung wird nicht wenig dazu beitragen, dem Buch zu seinem wohlverdienten Erfolg zu verhelfen. Es ist zu hoffen, daß eine zweite Auflage die seit Erscheinen der ersten bekanntgewordenen Verbesserungen und Verfeinerungen der Theorie berücksichtigen wird.

Berlin. W. Thurow. 699

Dr. ALFRED LOEWY, ord. Professor an der Universität Freiburg i. B. Versicherungsmathematik. Vierte neubearbeitete und durch Hinzunahme der Invalidenversicherung erweiterte Auflage. Verlag von Julius Springer, Berlin 1904. V + 224 S. Preis 6,90 M, geb. 7,80 M.

Das Löwysche Lehrbuch ist aus der Sammlung Göschen schon seit Jahren allgemein bekannt und hat infolge seiner prägnanten Kürze und ausgezeichneten Darstellung verdiente Verbreitung gefunden. In der neuen, vierten Auflage ist der bisherige knappe Umfang durch Hinzunahme der Invalidenversicherung bedeutend erweitert worden und es ist daher auch diese Auflage nicht in dem Format der Göschenbüchlein erschienen. Der erste Teil des neuen Buches deckt sich nach Disposition und Darstellung vollständig mit der dritten Auflage und umfaßt die ersten 131 Seiten. In den folgenden Seiten ist in vier Kapiteln die Invalidenversicherung auf insgesamt 73 Seiten dargestellt. Die Kapitel betreffen eine Darstellung der Invalidenordnung und der Grundzahlen und Grundformeln für die reine Invalidenversicherung, die Gewinnung der Ausscheidetafeln für Aktive und die Grundformeln für die Invaliditätsversicherung der Aktiven, weiter die Witwen- und Waisenversicherung vom Standpunkte der Sozialversicherung aus, und endlich die Deckungssysteme, ebenfalls vom Standpunkte der Sozialversicherung aus betrachtet. Zu diesen Kapiteln wäre zu bemerken, daß das bekannte Erfordernis, daß die Konstruktion einer Aktivitätsordnung für die Sozialversicherung und für die Lebensversicherung nach ganz verschiedenen Grundsätzen erfolgt, nicht erwähnt ist, trotzdem die Invaliditätsversicherung als Zusatzversicherung zur Lebensversicherung ausführlich behandelt wird. Die Darstellung der Deckungssysteme beschränkt sich naturgemäß bei ihrem Umfange von nur 22 Seiten auf die notwendigsten Andeutungen. Neu ist weiter noch das Schlußkapitel, in welchem an Hand der Gothaer Erfahrungen die Ausscheideordnung des Versichertenbestandes dargelegt und der Begriff der Kontributionsformel und der Dividendenreserve behandelt wird. Auch dieses letztere Kapitel, insbesondere der zweite Teil desselben, ist sehr knapp bearbeitet. Es fehlen, was eigentlich im Rahmen dieser Auseinandersetzung notwendig gewesen wäre, irgendwelche Erörterungen der prinzipiellen Fragen, die sich an die modernen Rechnungsmethoden der Lebensversicherung knüpfen. Die Literaturangaben über die Lebensversicherung sind aus der dritten Auflage wiederholt, die Literaturangaben über die Invalidenversicherungsmathematik betreffen ausschließlich Werke der Pensionsversicherung und der Sozialversicherung. Es ist zu hoffen, daß bei einer Neuauflage der Verfasser auch auf die Literatur der Invalidenversicherungsmathematik in der »normalen« Lebensversicherung Bedacht nehmen wird. Von den 5 beigedruckten Tafeln sind die beiden ersten ebenfalls aus der dritten Auflage wiederholt, die folgenden drei stützen sich auf Grundlagen der deutschen Angestellten- und Sozialversicherung.

Feber 1926. E. Fanta. 655

Dr. ALFRED **BERGER**, Mathematiker der Lebensversicherungsgesellschaft Phönix in Wien. Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. 1. Teil: Die Versicherung der normalen Risiken. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. 244 S. Preis 10,50 M, geb. 12 M. — 2. Teil: Risikotheorie. Rückversicherung. Versicherung der nicht normalen Risiken. Invaliditätsversicherung. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VII + 274 S.

In dem vor etwas mehr als einem Jahre erschienenen ersten Teile wurden die grundlegenden Theorien einer modernen Lebensversicherungstechnik behandelt. Bereits an dem ersten Teile konnte rühmend hervorgehoben werden, daß eine derartige allgemeine, nicht auf spezielle Verhältnisse abgestellte Darstellung der modernen Rechnungsmethoden, insbesondere alles desjenigen, was aus den Rechnungsgrundlagen zweiter und dritter Ordnung folgt, bisher noch nicht vorgelegen war. In noch erhöhtem Maße muß diese Anerkennung dem zweiten Teile gezollt werden, welcher sich zur Aufgabe stellt, gewisse, hauptsächlich für die praktische Behandlung der Lebensversicherungstechnik wichtige Spezialaufgaben erschöpfend zu behandeln.

Meines Wissens ist, wenigstens vom mathematischen Standpunkte aus, eine zusammenhängende Darstellung der Theorie der Rückversicherung, der Versicherung der minderwertigen Risiken und der Extrarisiken bis jetzt in keinem einzigen deutschen Lehrbuche enthalten gewesen. Die Aufgabe, die hier gestellt ist, ist gewiß nicht leicht zu lösen. Es handelt sich darum, zwischen den vielfach ohne besondere technische Ueberlegungen in die Praxis eingedrungenen Gebräuchen und Methoden einerseits und den technischen Erfordernissen, welche diesen Problemen zugrundeliegen, anderseits eine Brücke zu schlagen. Mit Recht hebt Berger im Vorworte hervor, daß manche dieser in der Praxis sozusagen intuitiv gelösten Aufgaben von vielen Seiten technisch deshalb für unlösbar gehalten werden, weil die nötigen statistischen Unterlagen nicht vorhanden oder schwer unter einen Gesichtspunkt zu bringen sind. Der Verfasser wendet sich auch mit Recht dagegen, daß daraus der Schluß gezogen werde, daß darum die Behandlung dieser Aufgaben der Mithilfe des Technikers entraten kann und verlangt das Streben, richtig und betriebsnotwendig erkannte versicherungstechnische Methoden auch auf diesem Gebiete nicht preiszugeben.

Der gemeinsame Gesichtspunkt, aus welchem diese Fragen zu behandeln sind, ist ein zweifacher. Der eine ergibt sich aus den im ersten Teile dargelegten Grundsätzen über den Betrieb der Lebensversicherung selbst. Ich habe über diese Grundsätze in der ersten Besprechung bereits eingehend referiert und kann mich infolgedessen diesbezüglich auf meinen damals wiedergegebenen Auszug berufen. Der zweite Gesichtspunkt sind diejenigen Grundsätze, die sich aus den Folgerungen der Risikotheorie ergeben. So ist denn auch den Darlegungen des zweiten Teiles als erster Abschnitt eine Darstellung der Risikotheorie vorausgeschickt, welche von vornweg in allem und jedem auf die Lebensversicherung abgestellt wird. In diesem ersten Teile, insbesondere in den Paragraphen, welche von dem mittleren Risiko, von der Minimalzahl der Versicherten und dem Maximum der Versicherungssumme handeln, sind mannigfache Ergebnisse selbständiger Forschungen des Verfassers wiedergegeben.

Von dem Gesichtspunkte aus, welcher sich aus dem ersten Teile ergibt, ist im zweiten und dritten Teile die Behandlung der Rückversicherung und der Versicherung minderwertiger Leben vorgenommen. Insbesondere zu dem letzteren Abschnitte ist zu sagen, daß eine kritische und zusammenfassende Darstellung der in unzähligen Abhandlungen verstreuten Gedanken bisher vermißt worden ist. Wie es bei dem Bestreben des Verfassers, seine Ansichten scharf und unabhängig zu präzisieren, naturgemäß ist, wird mancherlei den Widerspruch von Fachgenossen herausfordern. Ich persönlich kann z. B. die Ansichten Bergers über den Vergleich der Methode der Alterserhöhung und der Methode der perzentuellen Erhöhung der Sterbenswahrscheinlichkeiten in manchen Belangen nicht ganz teilen. Solchen Bedenken gegenüber tritt aber der Wert einer bisher vermißten, zusammenhängenden Darstellung in den Vordergrund. Die Theorie der Rückversicherung ist meines Wissens in einem Lehrbuche der Lebensversicherungsmathematik bisher überhaupt nicht behandelt worden.

Natürlich ist sowohl in dem Kapitel über die Versicherung minderwertiger Leben, als auch über die Behandlung der Extrarisiken die prinzipielle Darstellung gegenüber der technischen, bezw. formelmäßigen unverhältnismäßig breiter ausgefallen. Jedes dieser beiden Kapitel gewinnt eben nur im Zusammenhange mit dem einleitenden ersten Abschnitt wirkliche Anregung für die Beurteilung der praktischen Einrichtungen der Lebensversicherungstechnik.

Im 5. Abschnitte ist die Invaliditätszusatzversicherung behandelt. Berger lehnt es ausdrücklich ab, die Invalidenversicherung in den Kreis seiner Behandlung zu ziehen und widmet seine Betrachtungen lediglich der Verwendung der Invaliditätsgrundlagen in der sogenannten großen Lebensversicherung.

Daß die Volksversicherung, deren Behandlung ich bei Besprechung des ersten Teiles gewünscht hatte, hier ausgeblieben ist, begründet der Verfasser ausdrücklich damit, daß er gefürchtet hat, damit dem Buche einen zu großen Umfang zu geben. Die großen, dem Verfasser zur Verfügung stehenden Literaturkenntnisse lassen diesen Mangel sehr bedauerlich erscheinen. Auch in diesem Teile muß nämlich hervorgehoben werden, daß die Literaturangabeen überaus reichhaltig sind und daher von einem gewissen Gesichtspunkte aus

einen dem eigentlichen Texte vollständig gleichwertigen Inhalt des Buches darstellen.

Mehr noch als der erste Teil kann der zweite Teil nicht genug den Studierenden der Versicherungsmathematik und den in der Praxis tätigen Versicherungstechnikern zur Lektüre empfohlen werden. Dies, wie bereits erwähnt, hauptsächlich aus dem Grunde, weil eine andere zusammenfassende Darstellung dieser in der Praxis alltäglichen Aufgaben sonst nicht zu finden ist.

Feber 1926. E. Fanta. 653

Dr.-Ing. MAX **MAYER,** Duisburg. Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften anstatt nach zulässigen Spannungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. IV + 66 S. Preis 2,70 M.

Der Verfasser verlangt in dieser Schrift, daß man an Stelle der üblichen Festigkeitsrechnung mit zulässigen Spannungen mit den sog. »Grenzkräften« rechnet, d. h. bei der Ermittlung der äußeren Kräfte und Momente die denkbar ungünstigsten Möglichkeiten in Betracht zieht, jedoch höhere Spannungswerte als zulässig erklärt. Die gebräuchlichen zulässigen Beanspruchungen der Materialien sind — so wird das begründet — willkürlich gewählt und gewähren keine Anschauung über den Sicherheitsgrad einer Konstruktion. Hier ist zu bemerken, daß gerade die kleinen Spannungen anschaulich sind, da damit der aller Rechnung zugrunde gelegte lineare Verlauf zwischen Spannung und Dehnung (wenigstens bei einigen Materialien) erfüllt ist. Bei linearem Zusammenhang zwischen Belastung und Spannung ist es grundsätzlich gleich wie man rechnet; bei nicht linearen Beziehungen, z. B. bei gewissen Fällen der zusammengesetzten Festigkeit und bei der Knickung rechnet man ja so, daß man eine Bruchlast bestimmt und einen Teil als zulässig ansieht. Die Wahl des Sicherheitsgrades ist nun allerdings ein praktischer Griff, aber nach dem Vorschlag von M. Mayer steht man vor der gleichen Schwierigkeit, die zweckmäßigen Voraussetzungen über die Häufung der ungünstigsten Fälle zu finden. Von einem Vorteil dieses Verfahrens kann somit keine Rede sein.

Ratzersdorfer. 677

Dr.-Ing. H. **MARCUS,** Direktor der Huta Hoch- und Tiefbau-Akt.-Ges. Breslau. Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. Mit 33 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. 92 S. Preis 5,10 M.

Allseitig aufgelagerte rechteckige Platten werden im Eisenbetonbau in der Regel nicht nach der Plattentheorie, sondern als Trägerrost berechnet, indem die Platte in sich rechtwinkelig kreuzende Balken zerlegt wird. Die Lastanteile, die auf diese Balken entfallen, werden dabei mit der Bedingung bestimmt, daß im Plattenmittelpunkt für beide Balkenstreifen die gleiche Durchbiegung vorhanden ist. Diese Methode liefert ungünstigere Resultate als die genaue Theorie. In der vorliegenden Schrift gibt nun H. Marcus einfache Näherungsformeln für die Berechnung rechteckiger Platten mit verschiedenen Randbedingungen an, Formeln, die den Ergebnissen der Theorie angepaßt sind. Die Belastung der Platten ist entweder gleichförmig verteilt oder sie besteht aus in der Mitte der Platte angreifenden Einzellasten. Ausgegangen wird wieder vom Trägerrost, für den die Belastungsanteile der sich kreuzenden Streifen in der früheren oben beschriebenen Weise ermittelt werden. Die maximalen Biegungsmomente, die man mit diesen Lasten findet, erhalten aber jetzt eine Korrektur; sie werden mit einem Faktor multipliziert, den Marcus aus dem Resultat der Theorie ableitet und in guter Näherung als Funktion von Biegungsmomenten des Trägerrostes ausdrückt. Die so gewonnenen Größtwerte der Momente sollen für einen Bereich von etwa der Hälfte jedes Streifens der Dimensionierung unterlegt werden. Die bequem anwendbaren Formeln sind in den amtlichen Eisenbetonbestimmungen zur Berechnung empfohlen.

Ratzersdorfer. 676

Dr. h. c. CARL **LEISS,** Berlin-Steglitz. Die modernen optischen Meßinstrumente des Kristallographen und Petrographen. Ihre Beschreibung und Justierung. Mit 28 Abb. im Text. Sonderabdruck aus Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie. 10. Bd. Verlag von Gustav Fischer, Jena 1925. 91 S. Preis brosch. 3,60 M.

In dem vorliegenden Bändchen hat sich der Verfasser bei der Beschreibung der in Frage kommenden Instrumente (I. Goniometer, II. Achsenwinkelapparate nach E. A. Wülfing, III. Refraktometer zur Bestimmung fester und flüssiger Körper, IV. Mikroskope, V. Monochromatoren) auf das beschränkt, was dem Kristallographen und Petrographen an wirklich neueren optischen instrumentellen Hilfsmitteln zur Verfügung steht. Sein Zweck ist, die praktischen Erfahrungen einer langjährigen Beschäftigung mit den Prüfungs- und Justiermethoden dieser Instrumente der jüngeren Generation zugänglich zu machen.

Berlin. Cl. v. Simson. 686

FELIX **KLEIN,** Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage. Erster Band. Arithmetik, Algebra, Analysis. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 125 Abb. Bd. XIV der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924. VIII + 321 S.

Durch die Veröffentlichung, deren erster Teil hier vorliegt, werden in dankenswerter Weise die beiden 1908 als autographierte Vorlesungs-

hefte erschienenen Vorlesungen über »Elementarmathematik« sowie eine weitere gleichfalls autographierte Vorlesung über »Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie«, einem breiten Leserkreise zugänglich gemacht. Die drei Hefte sollen drei Teile eines den Gesamttitel »Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus« führenden Werkes bilden.

Die Idee, die den beiden ersten Teilen zugrunde liegt, ist am besten charakterisiert durch des Verfassers Worte aus dem Vorwort zur 1. Auflage der »Elementarmathematik«, in denen er sie zu seiner unmittelbar vorher veröffentlichten durchaus didaktisch orientierten Autographie »Ueber den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen« in Beziehung setzt: »An die Uebersicht über die schiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden, Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer — oder auch dem reiferen Studenten — Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb vom Standpunkt der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen.« Dieses Programm wird im 1. Bande, der hier vorliegt, zunächst für das Gebiet der Arithmetik, Algebra und Analysis in Angriff genommen. Der erste Teil ist der Darstellung des Zahlbegriffs in seiner stufenweisen Entwicklung gewidmet. Besonders wertvoll für den Lehrer ist ein Abschnitt über die Bedeutung der Zahlentheorie im Schulunterricht. Ein ungemein lebendiges »Zwischenstück: Ueber die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt« erhöht noch die Bedeutung dieses Teils. Nach einem Abschnitt über Algebra setzt die Behandlung der Analysis ein, der die größere Hälfte des Werkes gewidmet ist. Die elementaren Funktionen und die Elemente der Infinitesimalrechnung werden — in stets historisch belebter Darstellung — entwickelt. Anhangsweise werden die Grundbegriffe der Mengenlehre vorgeführt.

H. Pollaczek-Geiringer. 500

Dr. phil. GEORG **WOLFF,** Studiendirektor in Hannover. Mathematik und Malerei. Mit 21 Figuren und 35 Abb. im Text und auf 4 Tafeln. Zweite verbesserte Auflage. Mathematisch-Physikalische Bibliothek 20/21. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1925. 84 S. Preis 2 M.

Das Büchlein bildet zunächst eine Art von Einführung in die Perspektive, deren Gesetze an Gemälden aller Zeiten bestätigt werden, und zwar in historischer Aufeinanderfolge nach dem Grundsatz: »Die Geschichte der Perspektive geht mit der Entwicklung der Malerei Hand in Hand.« Es wird dann, wieder an vielen Beispielen, gezeigt, wie man an einem vorgelegten Gemälde die charakteristischen Elemente Augpunkt, Distanz usw. finden und so die Konstruktionsarbeit des Meisters auch rückwärts verfolgen kann. Ein letztes Kapitel zeigt an »Idealfiguren der Portraitmalerei« gewisse von manchen Künstlern beobachtete gesetzmäßige Proportionen des menschlichen Körpers.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 670

Dr. FR. A. **WILLERS,** Privatdozent an der Technischen Hochschule Charlottenburg. Mathematische Instrumente. Mit 68 Fig. Sammlung Göschen Nr. 922. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1926. 144 S. Preis 1,50 M.

Das vorliegende Bändchen bringt eine sehr brauchbare Beschreibung und Theorie der wichtigsten mathematischen Instrumente. Es ist besonders zu begrüßen, daß auch neuere Instrumente, die in den älteren Büchern, wie dem von Galle noch fehlen, hier Aufnahme gefunden haben.

A. **KISTNER,** Deutsche Meister der Naturwissenschaft und Technik. Band I: Deutsche Meister der Naturwissenschaft. Zweite vermehrte Auflage. Verlag von Josef Kösel & Friedrich Pustet/K.-G., München. 198 S. Preis 2,50 M. Sammlung Kösel, Bd. 102. — Band II: Deutsche Meister der Technik. Zweite vermehrte Auflage. 212 S. Preis 2,50 M. Sammlung Kösel, Bd. 103.

Besondere Freude werden die hübschen inhaltsreichen Bändchen dem bereiten, der sich bei ihrer Durchsicht der schönen Bilder im Ehrensaale des Deutschen Museums erinnern kann, nach denen die Auswahl der Biographien getroffen ist. Aber auch unabhängig davon wird die lebendige Schilderung des Lebens und — soweit dies populärwissenschaftlich möglich ist — der sachlichen Leistungen der großen deutschen Gelehrten manchem willkommen sein.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 665

ERICH **HECKE,** Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1913, Akademische Verlagsbuchhandlung. VII + 266 S. Preis geh. 9 M, geb. 11 M.

Leser dieser Zeitschrift, welche sich neben dem Interesse für die Anwendungsgebiete oder für ein Anwendungsgebiet der Mathematik auch die Freude an dem Urtrieb der mathematischen Spekulation nicht haben verkümmern lassen, seien auf dieses Werk hingewiesen. Kommt doch in der Zahlentheorie dieser Urtrieb am meisten zum Ausdruck, und hat es doch der Verfasser verstanden, in seltener Kunst der Darstellung und der Gedankenführung, auf engem Raum dieser Königin der Mathematik, wie Gauß sich ausdrückte, oder um mit Kronecker zu reden: der einzigen von Gott erschaffenen Figur unter den mathematischen Gestalten einen ragenden Tempel zu errichten.

Bieberbach. 658

Dr. EUGENIO **BERTINI,** o. Professor an der Universität in Pisa. Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Mit einem Anhang über algebraische Kurven und ihre Singularitäten. Nach der zweiten italienischen Ausgabe Deutsch herausgegeben von Dr. Adalbert Duschek, Assistent an der Technischen Hochschule in Wien. Verlag von L. W. Seidel & Sohn in Wien, 1924. XXXII + 471 S. Geh. 22 M, geb. 25 M.

Verbot der Anschauung und Entwicklung oder Disziplinierung der Anschauung sind die beiden Heilmittel gegen die Schäden, die allzu naive Verwendung anschaulicher Schlußmethoden mit sich bringen können. Das im vorliegenden Buch behandelte Gebiet zeigt besonders deutlich, daß die von Klein empfohlene Erziehung der Anschauung doch einen viel weiteren Wirkungsbereich hat, als man zunächst annehmen möchte. Es handelt sich eben nicht bloß um eine grobe sinnliche Veranschaulichung, sondern um eine innere Anschauung, das lumen naturale Descartes', die Intuition der heutigen Intuitionisten, die auch anscheinend so spröde Stoffe, wie eine mehrdimensionale Geometrie zu einem anschaulich erfaßbaren Ganzen zu gestalten vermag, bei genügender gedanklicher Vertiefung in den Gegenstand. Das vorliegende Buch lehrt die Richtigkeit dieser Auffassung und zeigt, wie man mit einem Minimum an Rechnung unter konkreter anschaulicher Bedeutung eines jeden Schlusses den Gegenstand durchdringen kann. Die Uebersetzung ist vorzüglich gelungen.

Bieberbach. 660

GANESH **PRASAD,** Vorsitzender der mathem. Gesellsch. in Benares. Mathematische Forschung in den letzten zwanzig Jahren. Rede, gehalten am 21. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin 1923. 37 S.

Die Hauptfortschritte, welche die Mathematik in den ersten 20 Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts gemacht hat, liegen nach des Verfassers Ansicht in der Theorie der Integralgleichungen, in gewissen Untersuchungen zu den Grundlagen der mathematischen Physik, in den Verallgemeinerungen des Begriffes der konvergenten Reihen und in der Entwicklung des Relativitätsprinzips. Der Verf. bespricht einige Arbeiten aus diesen Gebieten und hebt Fragen hervor, die zu neuen Forschungen anregen könnten. Daneben bringt er manche historisch interessante und wenig bekannte Einzelheit, wie z. B. die Bedeutung Du Bois Reymonds in der Geschichte der Integralgleichungen.

Daß der Verf. den divergenten Reihen und den Untersuchungen über die Grundlagen der Physik den Vorzug gibt, beispielsweise vor den bahnbrechenden Forschungen auf dem Gebiete der reellen Funktionen und auf dem Gebiete der Funktionen eines komplexen Argumentes, wird nicht nach jedermanns Geschmack sein. So scheint mir z. B. die neuere Funktionentheorie von wesentlich größerer Bedeutung für die Gestaltung der modernen Mathematik als die in ihrem Wert ziemlich umstrittenen mathematischen Untersuchungen, die der Verf. zu den Grundlagen der Physik anführt. Welche Blüte und welche Flut neuer Ideen sind im Gebiete der Funktionen von reellen und von komplexen Veränderlichen in jenen 20 Jahren erstanden und wie gering war andererseits der Einfluß jener Arbeiten über die Grundlagen der Physik auf diese selbst. So hätten wahrlich gerade diese Untersuchungen mehr als Stillschweigen verdient, auch wenn sie den Verf. genötigt hätten, auch dem französischen Einschlag in der modernen Mathematik eine gewisse Aufmerksamkeit zu widmen. Sind es doch schließlich Ansätze und Gedanken, die gerade das Lebenswerk von Georg Cantor und Weierstraß nahelegte. Daß Prasad die Theorie der Integralgleichungen zu den bedeutendsten Errungenschaften rechnet, finde ich sehr berechtigt, vermisse aber unter den Wegbereitern einer allgemeinen Theorie Hermann Amandus Schwarz, der doch in seinen Untersuchungen über die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$, die ihm wie sein ganzes Lebenswerk aus der Theorie der Minimalflächen erwuchsen, zuerst Eigenwerte und Eigenfunktionen einer speziellen Integralgleichung betrachtet hat und dies im Jahre 1885, also lange vor den vom Verf. angeführten Aeßerungen von Du Bois Reymond.

Des Weiteren finde ich es merkwürdig, daß der Verf. den späten Wucherungen der Hilbertschen Axiomatik auf physikalischem Gebiete einen Platz gönnt, während er die Leistung der Axiomatik auf geometrischem Gebiete, wo sie ihren größten Triumph gefeiert, und wo sie große Schule gemacht hat, mit Stillschweigen übergeht. Ich begnüge mich mit diesen Beispielen, die wohl zur Genüge zeigen, welch interessante Fragen die Schrift anschneidet oder anregt. L. Bieberbach. 426

NACHRICHTEN

Carl Runge. Am 30. August dieses Jahres hat Carl Runge in Göttingen seinen siebzigsten Geburtstag gefeiert. Mit seinem Namen ist die Entwicklung der angewandten Mathematik in Deutschland auf das engste verbunden; es sei uns deshalb gestattet, auf sein Werk mit einigen Worten einzugehen.

Runge ist als Sohn eines Bremes Kaufmannes in Havanna geboren. Seine Jugend verlebte er größtenteils in Bremen, seine Studienjahre führten ihn nach München und Berlin. Unter dem Einfluß von Weierstraß und Kronecker wandte er sich zunächst rein mathematischen Studien zu, deren Ergebnisse

in einer Anzahl von Arbeiten aus dem Gebiete der Algebra und Funktionentheorie niedergelegt sind, darunter die bekannten und für die Anwendungen besonders wichtigen Untersuchungen zur Theorie der analytischen Funktionen. — Als er nach einer dreijährigen Privatdozentenzeit 1886 an die Technische Hochschule in Hannover berufen wurde, eröffnete sich ihm das Arbeitsfeld, auf dem er so Großes zu leisten berufen war. Der Aufschwung der Technik stellte an die Ingenieurwissenschaften wachsende Anforderungen und es galt, für die Lösung der sich hier bietenden Probleme das mathematische Werkzeug zu schaffen. Es handelte sich um mehr als um die einfache Anwendung mathematischer Methoden auf technische Probleme; es handelte sich darum, diese Methoden den speziellen technischen Bedürfnissen anzupassen, um sie zum Handwerkszeug des denkenden Ingenieurs auszugestalten. — Es ist nicht ganz leicht, sich die Größe der hier geleisteten Arbeit heute ganz deutlich zu machen, die Leistung richtig einzuschätzen, die dazu gehörte, alles das bis zu wirklicher Einfachheit durchzubilden, was wir heute den Ingenieurstudenten als mathematisches Rüstzeug selbstverständlich mitgeben. Wenn es Runge gelungen ist, hier die Brücke zu schlagen zwischen der Mathematik und den technischen Wissenschaften, so beruht das auf zwei Eigenschaften, die den wahren angewandten Mathematiker ausmachen. Erstens seinen tiefgehenden mathematischen Kentnissen, die sich schon in seinen ersten, rein mathematischen Arbeiten offenbaren und die immer wieder dort hervortreten, wo er später die Probleme der angewandten Mathematik nach ihrer prinzipiellen, d. h. rein-mathematischen Seite hin verfolgt. Zweitens der unermüdlichen Energie, mit der er seine Methoden bis zur wirklichen praktischen Brauchbarkeit durchbildete, nicht blos bis zu dem Punkte, den der Mathematiker »einfach« nennt, sondern bis dahin, wo der rechnende Praktiker seine Abneigung gegen den mathematischen Mechanismus verliert. Um dieses Ziel zu erreichen, hat Runge sich in persönlicher Zusammenarbeit mit praktisch tätigen Ingenieuren über deren Denk- und Arbeitsweise unterrichtet, ein Beispiel, das wahrlich der Nachahmung wert ist.

Die Ergebnisse seiner Tätigkeit als Forscher und Lehrer sind in einer großen Anzahl von Einzelarbeiten, in den Beiträgen zur Enzyklopädie und in einer Reihe von Lehrbüchern niedergelegt. Ferner sei seine Mitarbeit in der Leitung der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik erwähnt, die er mit Mehmke zusammen herausgab. Dies alles im einzelnen zu würdigen, müssen wir uns hier versagen.

Gleichwertig neben Runges mathematischen Leistungen stehen seine Arbeiten auf physikalischem Gebiete, die sich hauptsächlich mit der Untersuchung der Serienspektren und ihrer Gesetze befassen. Diese Arbeiten biden ein Teil des Fundamentes, auf welchem das Gebäude der modernen physikalischen Forschung errichtet worden ist, und haben nicht weniger als seine mathematischen Arbeiten dazu beigetragen, dem Namen Runges unter den Naturwissenschaftlern der ganzen Welt seinen Klang zu verleihen.

Im Jahre 1905 wurde Runge auf Veranlassung von Klein nach Göttingen berufen, wo er bis zu seiner Emeritierung die angewandte Mathematik an der Universität vertreten hat. Im Wintersemester 1909/10 hielt er an der Columbia-Universität in New York als Austauschprofessor Vorlesungen über graphische Methoden.

An Anerkennung seiner Leistungen hat es Runge nicht gefehlt: als höchste Anerkennung darf er vielleicht die Liebe und Verehrung seiner Freunde, seiner Fachgenossen und seiner Schüler schätzen, die dem Menschen ebenso gilt wie dem Meister der Wissenschaft, und die an seinem Festtage aus allen Weilteilen den Wunsch zu ihm getragen hat, daß seine jugendliche Kraft ihm noch lange Jahre erhalten bleiben möge. Trefftz. 716

Protokoll des zweiten Internationalen Kongresses für Technische Mechanik in Zürich. Vom 12. bis 19. September d. Js. fand in Zürich der zweite Internationale Kongreß für technische Mechanik statt, der unter großer Beteiligung von Gelehrten aller Länder außerordentlich erfolgreich verlief. Der Einladung des Internationalen Kongreß-Komitees waren im ganzen 269 Personen gefolgt, die sich auf 20 verschiedene Länder wie folgt verteilten:

Schweiz 91, Deutschland einschl. Danzig 77, Frankreich 16, England 13, Holland 13, Tschechoslowakei 8, Japan 8, Oesterreich 7, Italien 6, Polen 6, Verein. Staaten 6, Belgien 3, Schweden 3, Rumänien 2, Griechenland 2, Türkei 2, Litauen 2, Aegypten 2, Bulgarien 1, Norwegen 1.

Sonntag, den 12. September abends eröffnete der Vorsitzende des örtlichen Komitees, Hr. Prof. Meißner-Zürich, den Kongreß mit einer Ansprache im Auditorium maximum der Hochschule und überbrachte zugleich die Grüße der schweizerischen Behörden. Der Rektor der Technischen Hochschule, Hr. Prof. C. Andrae, begrüßte die Anwesenden im Namen der Hochschule, die das Protektorat über den Kongreß übernommen hatte. Montag vormittag begannen die wissenschaftlichen Vorträge, deren Verzeichnis unten gegeben ist. Am Mittwoch, den 15. September nachmittags wurden die Verhandlungen zum Zwecke eines Besuches der Schweizerischen Erdbebenwarte im Degenried unterbrochen. Am Abend fand ein vom Organisationskomitee veranstaltetes Diner im Waldhaus Dolder statt, bei dem Prof. Stodola-Zürich die Festrede hielt, worauf im Namen der Kongreßteilnehmer Hr. v. Mises-Berlin und Hr. Jouguet-Paris antworteten. Donnerstag nachmittag empfing der Präsident des Schweizerischen Schulrats, Prof. Dr. Rohn, den Kongreß und wurde hierbei durch Ansprachen von den Hrn. Meißner-Zürich und Biezeno-Delft begrüßt, worauf er in herzlichen Worten erwiderte. In der Schlußsitzung

am Freitag, den 17. September nachmittags wurde der inzwischen vom Internationalen Komitee gefaßte Beschluß, den nächsten Kongreß im Jahre 1930 auf Einladung der schwedischen Kollegen in Stockholm abzuhalten, mitgeteilt und von der Versammlung beifällig aufgenommen. Gleichzeitig wurde die Bildung eines Exekutivkomitees, das aus den Herren v. Kármán-Aachen, Biezeno-Delft und Meißner-Zürich zusammengesetzt ist und mit dem Stockholmer Organisationskomitee den nächsten Kongreß vorbereiten soll, verkündet. Im Namen der auswärtigen Kongreßbesucher sprach Hr. Taylor-Cambridge den Dank an das Züricher Komitee aus. Auf die Schlußsitzung folgte dann noch ein gemeinsames Abendessen, zu dem die Behörden des Kantons und der Stadt Zürich die Kongreßteilnehmer auf den Uetliberg eingeladen hatten. Auf die Begrüßung der Behörden antwortete im Namen der Kongreßteilnehmer Hr. Hahn-Nancy.

Im folgenden Verzeichnis der auf dem Kongreß gehaltenen Vorträge sind in Klammern die Diskussionsredner, soweit sie von den Protokollführern verzeichnet wurden, angegeben. Ein ausführlicher Bericht, der den Wortlaut aller gehaltenen Vorträge umfassen wird, erscheint demnächst im Verlage von Orell Füssli, Zürich[1]).

Montag, den 13. September.

Allgemeine Sitzung.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Taylor-Cambridge.

Meißner-Zürich: Elastische Oberflächen-Querwellen. (Diskussion: Pfeiffer-Stuttgart, Seidl-Berlin).

Jouguet-Paris: La théorie thermodynamique de la propagation des explosions. (Burgers-Delft.)

v. Kármán-Aachen: Ueber elastische Grenzzustände. (v. Mises-Berlin, Hencky-Delft, Trefftz-Dresden, Reißner-Berlin.)

Nachmittags: Vorsitzender Hr. Prandtl-Göttingen.

Debye-Zürich: Ueber Molekularkräfte.

Taylor-Cambridge: Distorsion of Single Cristals of Metals. (Sachs-Berlin.)

Bridgman-Cambridge (U. S. A.): The Effect of Hydrostatic Pressure on Properties of Matter. (Fokker-Delft, Reißner, v. Kármán, Seidl, Sachs, Schmidt-Danzig, van den Broek-Michigan, Ekman-Lund.)

Dienstag, den 14. September.

Sektion I.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Plancherel-Zürich.

Roy-Toulouse: Sur le potentiel thermodynamique interne des lignes élastiques. (Vorgetr. von Hrn. Jouguet-Paris.) (Plancherel-Zürich, Hamel-Berlin.)

van den Dungen-Brüssel: Les équations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations. (Hahn-Nancy, v. Mises.)

Hencky-Delft: Ueber eine Anwendung ternärer orthogonaler Transformationen in schiefwinkligen (affinen) Axensystemen auf die Theorie der räumlichen Elastika.

Miche-Kairo: Le calcul pratique des problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales. (Pasternak-Zürich, Timoschenko-Wilkinsburg, Nádai-Göttingen, Plancherel.)

Trefftz-Dresden: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. (Plancherel, Biezeno-Delft, Pfeiffer.)

Nachmittags: Vorsitzender Hr. Timoschenko-Wilkinsburg.

Schwerin-Berlin: Ueber Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts.

Wolf-Wien: Gekoppelte Schwingungen elastischer Drähte bei Freileitungsanlagen.

Seidl-Berlin: Geologische durch Zerreißvorgänge entstandene Störungszonen als Problem der angewandten Mechanik.

Foëx et Kampé de Fériet-Straßburg: Enregistrement photographique des projectiles.

Soderberg-Pittsburg: Solution of Mechanical Systems encountered in Percussion Tools.

König-Rugby: Ein Verfahren zur Bestimmung der Schwingungszahlen profilierter Turbinenscheiben.

Swyngedauw-Lille: Note sur le changement des vitesses d'une courroie au moment où elle aborde ou quitte la poulie.

Sektion II.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Taylor-Cambridge.

Weißenberg-Berlin: Die geometrische Strukturtheorie der Materie.

Ono-Fukuoka: Zum Gleitwiderstande des Kristalls. (v. Kármán, Taylor-Cambridge.)

Schmid-Frankfurt: Zur quantitativen Beschreibung der plastischen Einkristalldehnung. (Sachs, Taylor, Nádai.)

Elam-London: Some Properties of Metal Crystals. (Taylor, Sachs, Bridgman-Cambridge, Schmid-Frankfurt.)

Perrier et de Mandrot-Lausanne: Elasticité et symétrie du quartz aux températures élevées. (Fokker.)

Sachs-Berlin: Beitrag zum Härteproblem. (Nádai.)

Nachmittags: Vorsitzender Hr. Biezeno-Delft.

Pöschl-Prag: Ueber strenge Lösungen aus der Theorie der Bogenträger.

Signorini-Neapel: Sur la statique du béton armé.

Hawranek-Brünn: Ueber Querverbindungen zweirippiger Bogen im Brückenbau. (Valenta-Brünn, Wagner-Bregenz, Domke-Aachen.)

Mayer-Mannheim: Die Knicksicherheit halboffener Brücken beim Fehlen elastischer Querstützung. (Hawranek-Brünn, Biezeno.)

[1]) **Subskriptionspreis bis 15. Oktober: 38 Schw. Fr. für direkte Bestellung beim Verlag.**

Beggs-Princeton: The Use of Models in the Solution of Indeterminate Structures. (Jenny-Zürich, Biezeno, Honegger-Zürich.)

Krebitz-Graz: Die günstigste Form statisch unbestimmter Bogenträger. (Domke.)

Sektion III.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Baes-Brüssel.

Weinstein-Rom: Sur la vitesse de l'onde solitaire. (Burgers, Riabouchinsky-Paris, Levi-Civita-Rom.)

Risser-Paris: Essai sur les ondes d'émersion et d'impulsion. (Levi-Civita.)

Barrillon-Paris: Rôle des vagues divergentes dans la résistance à la marche des flotteurs. (Riabouchinsky, v. Kármán, Levi-Civita.)

Bouligand-Poitiers: Sur le signe de la pression dans un liquide. (Riabouchinsky.)

Ackeret-Göttingen: Ueber Grenzschicht-Absaugung. (Riabouchinsky, Zerkowitz-München, v. Kármán, Rehbock-Karlsruhe, v. Mises, Föttinger-Berlin, Schiller-Leipzig, Betz-Göttingen.)

Nachmittags: Vorsitzender Hr. Reißner-Berlin.

Broszko-Warschau: Ueber turbulente Strömung in Röhren. (Vorgetr. durch Hrn. Huber-Lemberg.)

Sörensen-Karlsruhe: Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder. (Prasil-Zürich, Spannhake-Karlsruhe, Reißner, Föttinger.)

Prasil-Zürich: Verschiedene Strömungserscheinungen. (Prandtl-Göttingen, Reißner, Föttinger, Spannkake, v. Kármán.)

Föttinger-Berlin: Ueber die Labilität der Potentialströmungen. (Betz, Levi-Civita, v. Kármán, Low.)

Zeilon-Upsala: Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem. (Ackeret-Göttingen, Riabouchinsky.)

Zeilon-Upsala: Die Berechnung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie.

Mittwoch, den 15. September.

Allgemeine Sitzung.

Vormittags: Vorsitzender Hr. v. Mises-Berlin.

Prandtl-Göttingen: Ueber die ausgebildete Turbulenz. (Taylor, Riabouchinsky, Lorenz-Danzig, v. Kármán, Burgers, Föttinger.)

Camichel-Toulouse: La théorie des coups de bélier. (v. Mises.)

Jones-Cambridge: The Control of Stalled Aeroplanes. (Hopf-Aachen, Reißner).

Donnerstag, den 16. September.

Sektion I.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Levi-Civita-Rom.

Bouligand-Poitiers: Théorie du potentiel Newtonien. Sur le principe de Picard. (Buhl-Toulouse, Plancherel.)

Buhl-Toulouse: Les origines »Stockiennes« de la Cinématique.

Baes-Brüssel: Mode expérimental nouveau rélatif à l'application des surfaces à courbure constante à la solution du problème de la torsion des barres prismatiques. (Paschoud-Lausanne.)

Kummer-Zürich: Die Anwendung der Theorie des Zufalls auf die Trennung der Leistungsmaxima mehrerer, durch gemeinsame Energiezufuhr bedienter Zentralanlagen. (Levi-Civita.)

Mayor-Lausanne: Sur le calcul des systèmes articulés de l'espace. (Vorgetr. von Hrn. Paschoud-Lausanne.)

Baes-Brüssel: Contribution à l'étude des piliers au béton pretté.

Sektion II.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Beggs-Princeton.

Probst-Karlsruhe: Untersuchungen über den Einfluß wiederholter Belastungen auf Elastizität und Festigkeit von Beton und Eisenbeton. (Vorgetr. von Hrn. Roš-Zürich.)

Roš und Eichinger-Zürich: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. (Sachs.)

Föppl-Braunschweig: Die Dämpfung, die bei der Schwingungsbeanspruchung von Metallen auftritt, in Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit. (Hencky.)

Masing-Berlin: Eigenspannung und Verfestigung. (Hencky, Nádai, Ono-Fukuoka.)

Nádai-Göttingen: Versuche über die Fließgrenze des Eisens. (Huber-Lemberg, Roš-Zürich.)

Kögler-Freiberg: Neuere Versuche über die Verteilung des Druckes im Baugrund. (Schleicher-Karlsruhe, Andrae-Zürich.)

Honegger-Zürich: Metallerosion durch Wasser und Dampf. (Faber-Baden, Ono, Schuler-Göttingen.)

Nachmittags: Vorsitzender Hr. Huber-Lemberg.

Memmler-Berlin: Neuere experimentelle Beiträge zur Frage der Knickfestigkeit.

Gehler-Dresden: Die Spannungs-Dehnungs-Linie im plastischen Druckbereich und die Knickspannungslinie.

Roš-Zürich: Knicken flußeiserner Stäbe. (Gehler-Dresden, Ratzersdorfer-Breslau, Fillunger-Wien, Brunner-Zürich, Memmler-Berlin, Roš.)

Fillunger-Wien: Ueber die Knickung von Stäben mit Schneidenlagerung.

Platrier-Paris: Au sujet des pulsations critiques de torsion et de flexion. (Vorgetr. von Hrn. Jouguet-Paris.)

Federhofer-Graz: Ueber die Einbeulung des gleichmäßig gedrückten Kreisrings.

Wyß-Danzig: Die singulären Punkte in Kraftfeldern fester elastischer Körper.

Sektion III.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Oseen-Upsala.

Camichel-Toulouse: La méthode chronophotographique de détermination des vitesses dans les fluides.

Hamel-Berlin: Ueber einen hydrodynamischen Unitätssatz des Hrn. Weinstein.

Bénard-Paris: Sur les lois de la fréquence des tourbillons alternés détachés derriere un obstacle.

Bénard-Paris: Sur l'inexactitude expérimentale pour les liquides réels des lois théoriques de Kármán relative à la stabilité des tourbillons alternés dans un fluide parfait.

Zaremba-Krakau: Sur une transformation du problème hydrodynamique.

Fujiwhara-Tokio: An experiment on the behaviour on two vortices in water.

Nachmittags: Vorsitzender Hr. Burgers-Delft.

Hadamard-Paris: La formation des discontinuités dans les fluides. (Vorgetr. von Bouligand-Paris) (Poole-Oxford).

Riabouchinsky-Paris: Sur les singularités des mouvements fluides. (Low, Bénard-Paris, Föttinger, Seidl.)

Toussaint et Carafoli-Paris: Contribution à l'écoulement plan des fluides. (Vorgetr. von Hrn. Jouguet-Paris.)

Brodetsky-Leeds: Discontinuous Fluid Motion passed Curved Barriers. (Weinstein-Rom, Levi-Civita.)

Valcovici-Temešvar: Hydrodynamische Diskontinuitätsflächen um krumme Platten. (Brodetzky-Leeds.)

Hahn-Nancy: Méthode expérimentale pour la résolution des équations du mouvement des fluides.

Freitag, den 17. September.

Sektion I.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Hahn-Nancy.

Stodola-Zürich: Neuere kritische Drehzahlen an Dampfturbinen.

Schwerin-Berlin: Ueber die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen. (Meyer-Hamburg, Hort-Berlin.)

Koch-Delft: Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnell laufender Wellen. (Stodola, van den Dungen, Zerkowitz, Föppl-Braunschweig, Grammel-Stuttgart, Biezeno, Hamel, Schwerin-Berlin.)

Schuler-Göttingen: Resonanzerscheinungen beim Schlingertank.

Beghin et Monfraix-Lille-Paris: Sur l'application de l'asservissement à la sabilisation des navires. (Vorgetr. von Hrn. Jouguet-Paris.)

Blenk-Berlin: Gekoppelte Torsions- und Biegungsschwingungen von Tragflügeln. (Reißner, Stodola.)

Sektion II.

Vormittags: Vorsitzender Hr. Pöschl-Prag.

Huber-Lemberg: Biegungsprobleme eines durch Querrippen versteiften, orthotropen Plattenstreifens. (Eggenschwyler-Zürich.)

Eichelberg-Winterthur: Die Torsion von Schrumpfverbindungen. (Timoschenko, Nádai.)

Timoschenko-Wilkinsburg: On Stresses in Railway Track. (Pasternak, Reißner.)

Timoschenko-Wilkinsburg: On Stress Concentration produced by Fillets and Holes.

Pasternak-Zürich: Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen kreisrunden Eisenbetonbehältern. (Reißner.)

Eggenschwyler-Zürich: Biegungs-Schub und Drehbeanspruchung in unregelmäßigen Trägerquerschnitten. (Camichel-Toulouse, Reißner, Domke.)

Allgemeine Sitzung.

Nachmittags- Vorsitzender Hr. Jouguet-Paris.

Levi-Civita-Rom: Sur les chocs dans le problème des trois corps. (Carathéodory-München.) 715

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Am 14. September fand in Zürich die Jahresversammlung unter Vorsitz von Hrn. Prof. Prandtl-Göttingen in Anwesenheit von 28 Mitgliedern statt. Nach dem Bericht des Geschäftsführers sind im Berichtsjahr bis zum Tage der Versammlung drei Mitglieder durch den Tod, drei durch Austritt ausgeschieden; dagegen 72 neu eingetreten, so daß die Mitgliederzahl 261 beträgt. Zu Beginn des Geschäftsjahres wurde die Ortsgruppe Berlin errichtet, die im ganzen fünf Sitzungen abgehalten hat mit Vorträgen der Herren Prof. Rüdenberg-, Prof. Hamel-, Prof. Gröber-, Prof. Reißner-Berlin und Prof. Schrödinger-Zürich. Der Rechnungsabschluß vom 1. Oktober 1925 mit einem Kassenstand von 230,40 M ist von den Rechnungsprüfern geprüft und im Jahresbericht veröffentlicht worden. Der augenblickliche Kassenbestand beläuft sich auf 342,20 M. — Der Vorsitzende gedenkt hierauf der im abgelaufenen Jahre verstorbenen Mitglieder, der Herren G. Hessenberg und H. Winkel in Berlin und A. Harpf in Prag. Die Versammlung erteilt dem Vorstand Entlastung. Der Beitrag für das neue Geschäftsjahr wird auf 2 M wie bisher festgesetzt. Der nächste Tagungsort soll durch den Vorstandsrat bestimmt werden, wobei in erster Linie eine gemeinsame Tagung mit den Physikern ins Auge zu fassen ist. Der Vorstand bestehend aus den Herren Prandtl-Göttingen als 1. Vorsitzendem, Reißner-Berlin als 2. Vorsitzendem und v. Mises-Berlin als Geschäftsführer wird für eine weitere dreijährige Amtsdauer wiedergewählt. An Stelle der aus dem wissenschaftlichen Ausschuß satzungsgemäß ausscheidenden und nicht sofort wieder wählbaren Herren v. Kármán-Aachen und Körner-Prag werden gewählt die Herren Biezeno-Delft und Grammel-Stuttgart. Zu Rechnungsprüfern werden bestimmt die Herren Schwerin-Berlin und Trefftz-Dresden.

Nachtrag zu der Mitteilung »Vorlesungen über angewandte Mathematik im Sommerseme-

ster 1926«[1]): Herr Prof. Pfeiffer an der Techn. Hochschule in Stuttgart liest über »Graphische und numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen«.

Persönliches. Der Leiter der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen, Herr Dr. A. Betz, wurde zum a. o. Professor an der Universität Göttingen ernannt.

Herr Reg.- und Baurat Dr.-Ing. Richard Winkel, Abteilungsvorsteher der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin hat einen Ruf als o. Professor für Wasserbau an der Technischen Hochschule in Danzig angenommen.

Herr Dr. Harald Koschmieder, Assistent am Preußischen Meteorol. Institut in Berlin, wurde zum Direktor des Staatl. Observatoriums in Danzig ernannt. 714

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 6, S. 260 ff.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Zum Turbulenzproblem. Auf die im letzten Heft veröffentlichte Zuschrift des Herrn Noether erwidert Herr Prandtl das Folgende:

Auf die Erwiderung von Herrn Noether möchte ich antworten, daß zwar, wie ich schon in meiner Veröffentlichung von 1921 hervorgehoben habe (vergl. dort S. 435), gegen das aus geradlinigen Stücken bestehende »geknickte« Geschwindigkeitsprofil gewisse Bedenken bestehen, daß aber, wenn man es einmal zuläßt, die Tietjenssche Lösung als genaue Lösung für sehr große Reynoldssche Zahlen angesehen werden muß. Die Uebergangssubstitution an der kritischen Stelle $U = c$ liefert hier, wo das Glied $U''\varphi$ in dem Noetherschen Ausdruck B wegfällt, einfach die analytische Fortsetzung der Funktion über diese Stelle hinweg. Der Umstand, daß die Knickstellen sich im Lauf der Zeit etwas ausrunden, wird sehr geringfügige Aenderungen von Impuls und Energie der ganzen Strömung ergeben, so daß von diesen Stellen für die Beurteilung der Schwingungsvorgänge nichts zu fürchten ist, wenn die kritische Stelle $U = c$ nicht in der Nähe einer solchen Krümmung liegt. Die Schwierigkeiten, die das gekrümmte Profil gegenüber dem geradlinigen bietet, gehen von dem erwähnten Glied $U''\varphi$ aus. Meiner Ansicht nach muß das Verhalten der kritischen Stelle unter Mitwirkung dieses Gliedes genauer studiert werden, und es ist zu erwarten, daß man hierdurch die richtige Uebergangsbedingung finden wird. Eine derartige Untersuchung war seit langem von mir geplant, ist aber durch Versagen eines Doktoranden bisher nicht vorwärts gekommen. Ich will aber diese Untersuchung jetzt wieder in Gang bringen und hoffe in einiger Zeit über ihr Ergebnis berichten zu können.

Göttingen, den 28. Juli 1926. L. Prandtl.

* * *

Hr. Noether verzichtet nach Einsichtnahme in die obigen Ausführungen auf eine nochmalige Erwiderung, da nach seiner Meinung die Prandtlsche Auffassung nur mehr im Ausdruck von der seinigen abweicht. Den Ausführungen über die Uebergangssubstitutionen stimmt er zu. Es war aber gerade ein Gesichtspunkt seiner Untersuchung, diese zu vermeiden. Hr. Noether beabsichtigt, von diesem Standpunkt aus, die »geknickten Profile« in einer besonderen Note kurz zu behandeln.

Der Herausgeber.

Berichtigung

zum Aufsatz »Luftwiderstand, Gewicht und Kosten von Luftröhrchenkühlern« Heft 4, S. 313 bis 322.

In Zahlentafel 2 Seite 317 soll es heißen:

Zeile 1: Achse | Strömungsrichtung statt Achse L Strömungsrichtung,
» 8: Achse || Strömungsrichtung statt Achse S Strömungsrichtung,
Seite 318 in Formel (1a) ist β_e in den Zähler hinaufzusetzen,
» 320 in Formel (12b) ist γ in den Nenner hinunterzusetzen,
» 320 das letzte Glied in Formel (12c) lautet: $B_1 q^{r/2-1}$,
» 321 in Zeile 8 ist außerhalb der eckigen Klammer hinzuzufügen: s_L,
» 321 Zeile 16 soll es heißen: $\frac{Q}{G}$ statt $\frac{Q}{6}$.
» 322 Zeile 17 ist in der Dimensionsbezeichnung hinzuzufügen: h^{-1}.

(Redaktionsschluß 30. September 1926.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.